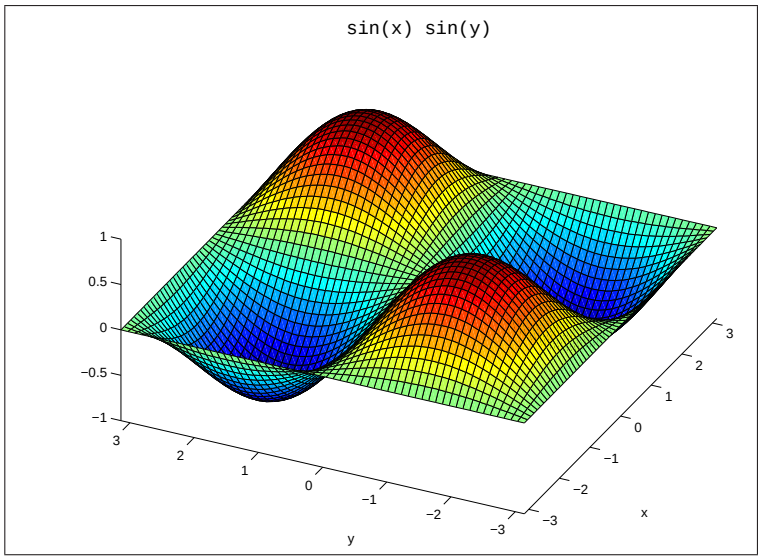


Università del Salento

Facoltà di Ingegneria

Antonio Leaci

Soluzione dei compiti di Analisi Matematica II



ANNI ACCADEMICI 2008-2016

Indice

I A.A. 2008/09 – Corso D.M.509 5

1 Compito di Analisi Matematica II del 12/01/09 6

2 Compito di Analisi Matematica II del 23/03/09 9

3 Compito di Analisi Matematica II del 6/04/09 13

4 Compito di Analisi Matematica II del 4/05/09 17

5 Compito di Analisi Matematica II del 29/06/09 22

6 Compito di Analisi Matematica II del 13/07/09 26

7 Compito di Analisi Matematica II del 7/09/09 30

8 Compito di Analisi Matematica II del 9/11/09 (F.C.) 35

9 Compito di Analisi Matematica II del 10/12/09 40

10 Compito di Analisi Matematica II del 12/01/10 44

II A.A. 2009/10 – Corso D.M.270 48

11 Compito di Analisi Matematica II del 12/02/10 49

12 Compito di Analisi Matematica II del 26/02/10 53

13 Compito di Analisi Matematica II del 26/02/10 (D.M. 509) 57

14 Compito di Analisi Matematica II del 30/04/10 59

15 Compito di Analisi Matematica II del 30/04/10 (D.M. 509) 62

16 Compito di Analisi Matematica II del 10/05/10 (F.C.) 65

17 Compito di Analisi Matematica II del 29/06/10 69

18 Compito di Analisi Matematica II del 29/06/10 (D.M. 509) 74

19 Compito di Analisi Matematica II del 19/07/10 (D.M. 509) 76

20 Compito di Analisi Matematica II del 13/09/10 (D.M. 509) 81

21 Compito di Analisi Matematica II del 15/12/10 (D.M. 270) 85

22 Compito di Analisi Matematica II del 15/12/10 (D.M. 509) 89

III A.A. 2011/12 – Corso D.M.270 91

23 Compito di Analisi Matematica II del 13/02/12 92

24 Compito di Analisi Matematica II del 13/02/12 98

25 Compito di Analisi Matematica II del 27/02/12 101

26 Compito di Analisi Matematica II del 27/02/12 108

27 Compito di Analisi Matematica II del 27/04/12 110

28 Compito di Analisi Matematica II del 27/04/12 115

29 Compito di Analisi Matematica II del 25/06/12 118

30 Compito di Analisi Matematica II del 25/06/12 124

31 Compito di Analisi Matematica II del 23/07/12 127

32 Compito di Analisi Matematica II del 4/09/12 131

33 Compito di Analisi Matematica II del 4/09/12 135

34 Compito di Analisi Matematica II del 19/09/12 137

35 Compito di Analisi Matematica II del 24/10/12 142

36 Compito di Analisi Matematica II del 17/12/12 146

37 Compito di Analisi Matematica II del 14/01/13 151

IV A.A. 2012/13 – Corso D.M.270 155

38 Compito di Analisi Matematica II del 19/02/13 156

39 Compito di Analisi Matematica II del 6/03/13 160

40 Compito di Analisi Matematica II del 23/04/13 164

41 Compito di Analisi Matematica II dell' 1/07/13 167

42 Compito di Analisi Matematica II del 17/07/13 171

43 Compito di Analisi Matematica II del 16/09/13 175

44 Compito di Analisi Matematica II del 22/10/13 178

V A.A. 2013/14 – Corso D.M.270 182

45 Compito di Analisi Matematica II del 16/01/14 183

46 Compito di Analisi Matematica II del 3/02/14 189

47 Compito di Analisi Matematica II del 19/02/14 195

48 Compito di Analisi Matematica II del 13/06/14 199

49 Compito di Analisi Matematica II del 30/06/14 204

50 Compito di Analisi Matematica II del 21/07/14 209

51 Compito di Analisi Matematica II del 08/09/14 213

52 Compito di Analisi Matematica II del 22/09/14 217

53 Compito di Analisi Matematica II del 29/10/14 221

54 Compito di Analisi Matematica II del 17/04/2015 226

VI A.A. 2015/16 – Corso D.M.270 230

55 Compito di Analisi Matematica II del 25/01/16 231

56 Compito di Analisi Matematica II del 8/02/2016 236

57 Compito di Analisi Matematica II del 22/02/2016 240

58 Compito di Analisi Matematica II del 14/06/2016 245

59 Compito di Analisi Matematica II del 4/07/2016 249

Parte I
A.A. 2008/09 – Corso D.M.509

Soluzione dei compiti di Analisi Matematica II (D.M.509)

1 Compito di Analisi Matematica II del 12/01/09

1. Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2 \, \mathrm{e}^{-nx} \, ,$$

e calcolarne la somma.

2. Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy'' + 2(y')^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3. Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_E z \, dxdydz \, ,$$

dove $E = \{ \, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \, \}$.

4. Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1 \, ,$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x^2 + y^2 \leq 9 \, \}$.

Soluzione del compito del 12/01/09

1. Studiamo la convergenza puntuale. Le funzioni sono tutte non negative. In $x = 0$ esse valgono tutte zero. Per $x \neq 0$ usando il criterio della radice troviamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x^2\ \mathrm{e}^{-nx}} = \mathrm{e}^{-x}\,,$$

perciò la serie converge puntualmente assolutamente in $[0, +\infty)$, diverge positivamente per $x < 0$.

Studiamo la convergenza totale in $X = [0, +\infty)$. Calcolando la derivata prima di ciascun termine troviamo $u_n'(x) = (2x - nx^2)\ \mathrm{e}^{-nx}$ che si annulla per $x = 0$ e $x = \dfrac{2}{n}$ dove $u_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{4}{n^2\,\mathrm{e}^2}$. Pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in X} |u_n(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2\,\mathrm{e}^2} < +\infty\,,$$

e dunque la serie converge totalmente (e quindi uniformemente) in X. La sua somma è

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-nx} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{x^2}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,.$$

2. L'equazione differenziale è autonoma dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ da cui $z'(y)y' = z'(y)z(y) = y''$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} yzz' + 2z^2 = 0 \\ z(1) = 1, \end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Separando le variabili otteniamo

$$\frac{z'}{2z} = -\frac{1}{y}.$$

Integrando risulta

$$\frac{1}{2}\log z = -\log y + c$$

cioè $z = \dfrac{k}{y^2}$ e, imponendo la condizione iniziale otteniamo $k = 1$. A questo punto dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Separando le variabili otteniamo

$$\int y^2\,dy = \int 1\,dx$$

cioè $\dfrac{y^3}{3} = x + c$ da cui, imponendo la condizione iniziale, troviamo $c = \dfrac{1}{3}$ e la soluzione $y(x) = (3x+1)^{1/3}$.

3. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali, imponendo $\varrho^2 = \sqrt{2-\varrho^2}$, abbiamo $0 \le \varrho \le 1$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $\varrho^2 \le z \le \sqrt{2-\varrho^2}$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned}\iiint_E z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho\,d\varrho \int_{\varrho^2}^{\sqrt{2-\varrho^2}} z\,dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{\varrho^2}^{\sqrt{2-\varrho^2}} \varrho\,d\varrho = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{2-\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{2}\right)\varrho\,d\varrho \\ &= 2\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{8} - \frac{\varrho^6}{12}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) = \frac{7\pi}{12}\,.\end{aligned}$$

4. La funzione è continua su un insieme chiuso e limitati, pertanto possiede massimo e minimo. Essa non è differenziabile in $(0,0)$, dove vale -1. Cerchiamo i punti stazionari interni. Il gradiente si annulla nelle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ 2\,y + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

ma questo sistema non ha soluzioni, dunque non ci sono punti stazionari interni. Studiamo la funzione sulla frontiera, dove si riduce alla funzione $g(y) = y^2 + 2$, con $y \in [-3,3]$. Allora $g' = 2y$, e dunque dobbiamo considerare $g(0) = 2$, e negli estremi dell'intervallo $g(\pm 3) = 11$. In definitiva, tornando a considerare la funzione f, abbiamo

$$f(0,0) = -1\,, \quad f(\pm 3, 0) = 2\,, \quad f(0, \pm 3) = 11\,,$$

pertanto il minimo di f è -1 e il massimo è 11.

2 Compito di Analisi Matematica II del 23/03/09

1. Risolvere il seguente Problema di Cauchy :

$$\begin{cases} 2yy'' = 1 + (y')^2 \\ y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1-x^2}{3x-1} \right)^n .$$

   Calcolarne la somma.

3. Calcolare il seguente integrale

$$\int_S |x^2 + y^2 - 1| \, dxdy$$

   dove $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \ 0 \le x \le \sqrt{3}, \ y \ge 0, \ x^2 + y^2 \le 4 \ \right\}$.

4. Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + 3y$$

   nell'insieme $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; x \ge 0, \ y \ge x, \ 4x^2 + y^2 \le 4 \ \}$.

Soluzione del compito del 23/03/09

1. L'equazione differenziale è autonoma dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ con $z'(y(x))z(y(x)) = y''(x)$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} 2yzz' = 1 + z^2 \\ z(1) = 0, \end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Separando le variabili otteniamo

$$\frac{2zz'}{1+z^2} = \frac{1}{y}.$$

Integrando otteniamo

$$\int \frac{2z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{y}\,dy,$$

da cui

$$\log(1+z^2) = \log y + c$$

cioè $1+z^2 = ky$ e, imponendo la condizione iniziale otteniamo $k = 1$. A questo punto dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y-1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Poiché $y(x) = 1$ non risolve l'equazione di partenza, separando le variabili otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{y-1}}\,dy = \int 1\,dx$$

cioè $2\sqrt{y-1} = x + c$ da cui, imponendo la condizione iniziale, troviamo $c = 0$ e la soluzione $y(x) = 1 + \dfrac{x^2}{4}$.

2. Con la sostituzione $y = \dfrac{1-x^2}{3x-1}$ otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} y^n = \mathrm{e}^y$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$, con convergenza totale negli intervalli limitati. Tornando nella variabile x abbiamo la convergenza puntuale per ogni $x \neq \frac{1}{3}$. Poiché per la funzione $f(x) = \dfrac{1-x^2}{3x-1}$ risulta

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

segue che la serie converge totalmente in $[a,b]\cup[c,d]$ con $b < \frac{1}{3} < c$. La somma della serie è $\mathrm{e}^{\frac{1-x^2}{3x-1}}$ per $x \neq \dfrac{1}{3}$.

3. Occorre distinguere tra $x^2+y^2-1<0$ e $x^2+y^2-1>0$. Inoltre l'intersezione tra la retta $x=\sqrt{3}$ e la circonferenza $x^2+y^2=4$ fornisce il punto $(\sqrt{3},1) = 2(\cos\dfrac{\pi}{6}, \sin\dfrac{\pi}{6})$.

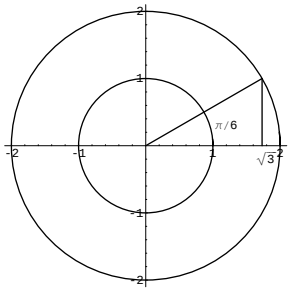


Figura 1: Dominio di integrazione.

Allora, passando in coordinate polari, l'integrale si spezza in tre parti e, tenendo conto che $x=\sqrt{3}$ diventa $\rho = \frac{\sqrt{3}}{\cos\vartheta}$, si ha:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta \\ &\quad+\int_0^{\pi/6}\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{\cos\vartheta}} (\rho^2-1)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta \\ &\quad+\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_1^2 (\rho^2-1)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta\,. \end{aligned}$$

I tre integrali valgono rispettivamente $\frac{\pi}{8}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{24}$, $\frac{3\pi}{4}$ e dunque l'integrale proposto vale $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{11\pi}{12}$.

Nel calcolo del secondo addendo interviene il seguente integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta &= \int \frac{1}{\cos^2\vartheta}\,\frac{1}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta \\ &= \frac{1}{\cos^2\vartheta}\tan\vartheta - \int \frac{2\sin\vartheta\tan\vartheta}{\cos^3\vartheta}\,d\vartheta \\ &= \frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} - 2\int \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta = \frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} - 2\int \frac{\tan^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta \\ &= \frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} - \frac{2}{3}\tan^3\vartheta = \frac{1}{3}\left(\frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} + 2\tan\vartheta\right).\end{aligned}$$

4. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ -4y + 3 = 0. \end{cases}$$

Troviamo $(0, \frac{3}{4})$ che appartiene alla frontiera. Sulla parte di frontiera $x = 0$ non ci sono altri punti stazionari quindi bisogna considerare anche i punti $(0,0)$ e $(0,2)$. Sulla parte di frontiera $y = x$ la funzione diventa $g(x) = x^2 + 3x$ con $x \in [0, 2/\sqrt{5}]$. La derivata $g'(x) = 2x + 3$ non si annulla nell'intervallo considerato, dunque bisogna aggiungere solo il punto $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Sulla parte di frontiera ellittica otteniamo $x^2 = 1 - \frac{y^2}{4}$ e la funzione diventa $h(y) = 3 - \frac{3}{4}y^2 - 2y^2 + 3y = 3 + 3y - \frac{11}{4}y^2$ con $y \in [2/\sqrt{5}, 2]$. La derivata $h'(y) = 3 - \frac{11}{2}y$ si annulla per $y = \frac{6}{11}$ che non appartiene all'intervallo in cui varia y. In definitiva dobbiamo valutare:

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,2) = -2, \quad f(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}}, \quad f(0, \frac{3}{4}) = \frac{9}{8},$$

Perciò il minimo di f è -2 e il massimo è $\frac{4}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}}$.

3 Compito di Analisi Matematica II del 6/04/09

1. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = xyz\log(x+y+z+2)$$

nell'insieme
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z-1 \le 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$.

2. Risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 10\cos x + \mathrm{e}^x \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -1\ . \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\!\!\int_D \log(x+y)\,dx\,dy\,,$$

dove $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x+y \le 2,\ y \le 2x \le 2y\}$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 1–periodica definita nell'intervallo $[0,1]$ da $f(x) = x - x^2$. Dire se f è sviluppabile in serie di Fourier e determinarne la serie.

   Dedurre dal risultato precedente la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\ .$$

Soluzione del compito del 6/04/09

1. La funzione è continua in un insieme chiuso e limitato, pertanto possiede massimo e minimo. Cerchiamo i punti stazionari risolvendo il sistema

$$\begin{cases} yz\log(x+y+z+2)+\dfrac{xyz}{x+y+z+2}=0\,, \\ xz\log(x+y+z+2)+\dfrac{xyz}{x+y+z+2}=0\,, \\ xy\log(x+y+z+2)+\dfrac{xyz}{x+y+z+2}=0\,. \end{cases}$$

   Da cui:

$$\begin{cases} yz\dfrac{(x+y+z+2)\log(x+y+z+2)+x}{x+y+z+2}=0\,, \\ xz\dfrac{(x+y+z+2)\log(x+y+z+2)+y}{x+y+z+2}=0\,, \\ xy\dfrac{(x+y+z+2)\log(x+y+z+2)+z}{x+y+z+2}=0\,, \end{cases}$$

   che ammette soluzioni solo sulla parte della frontiera di E dove due coppie di coordinate valgono 0, in cui la funzione vale zero.

   Studiamo la funzione sulla frontiera. Sui tre piani $x=0$, $y=0$ e $z=0$ la funzione vale zero. Resta da considerare il piano $x+y+z=1$. Su tale piano cerchiamo i punti stazionari vincolati della funzione $g(x,y,z)=xyz\log(3)$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} yz\log(3)-\lambda=0\,, \\ xz\log(3)-\lambda=0\,, \\ xy\log(3)-\lambda=0\,. \\ x+y+z=1\,. \end{cases}$$

   Dalle prime tre equazioni si ha $x=y=z$, e quindi dall'ultima $x=y=z=\dfrac{1}{3}$. In questo punto f vale $\dfrac{\log 3}{27}$, e dunque questo è il massimo della funzione, mentre il minimo è 0.

2. L'equazione è lineare non omogenea con termini noti di tipo particolare. Studiamo prima l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2-3\lambda+2=0$, le cui soluzioni sono $\lambda=1$ e $\lambda=2$, allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(x)=c_1\,\mathrm{e}^{x}+c_2\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Poiché e^x è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = A\cos x + B\sin x + Cx\,\mathrm{e}^x$. Calcolando le derivate di $\bar{y}$ e sostituendo nell'equazione, troviamo:

$$\begin{aligned}&-A\cos x - B\sin x + 2C\,\mathrm{e}^x + Cx\,\mathrm{e}^x\\&-3(-A\sin x + B\cos x + C\,\mathrm{e}^x + Cx\,\mathrm{e}^x)\\&+2(A\cos x + B\sin x + Cx\,\mathrm{e}^x) = 10\cos x + \mathrm{e}^x\ .\end{aligned}$$

Semplificando e uguagliando i coefficienti dei termini simili otteniamo:

$$\begin{cases} A - 3B = 10\,, \\ B + 3A = 0\,, \\ C = -1\,. \end{cases}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è:

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{2x} + \cos x - 3\sin x - x\,\mathrm{e}^x\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo:

$$y(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \cos x - 3\sin x - x\,\mathrm{e}^x\,.$$

3. Utilizziamo il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x + y = u\,, \\ \frac{y}{x} = v\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo $y = xv$ e sostituendo nella prima otteniamo: $x = \dfrac{u}{1+v}$ con le condizioni $1 \le u \le 2$ e $1 \le v \le 2$. La matrice Jacobiana è:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\[2ex] \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u+uv-uv}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale $\dfrac{u}{(1+v)^2}$. Allora l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned}&\int_1^2\int_1^2 \frac{u\log u}{(1+v)^2}\,dv\,du = \int_1^2 u\log u\left[-\frac{1}{1+v}\right]_1^2 du =\\&\frac{1}{6}\left(\left[\frac{u^2}{2}\log u\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{u}{2}\,du\right) = \frac{1}{6}(2\log 2 - 1 + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}(2\log 2 - \frac{3}{4})\,.\end{aligned}$$

4. La funzione f è pari, quindi la sua serie di Fourier contiene solo coseni. Calcoliamo i coefficienti (a_k). Risulta $\omega = 2\pi$ e quindi

$$a_0 = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,,$$

mentre $\forall\, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 (x - x^2)\cos(2k\pi x)\,dx \\ &= 2\left(\left[(x - x^2)\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2k\pi}(1 - 2x)\sin(2k\pi x)\,dx\right) \\ &= 2\left(\left[(1 - 2x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{(2k\pi)^2}\cos(2k\pi x)\,dx\right) = -\frac{1}{(k\pi)^2}\,. \end{aligned}$$

Allora risulta

$$f(x) = \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2}\cos(2k\pi x)\,.$$

Per $x = 0$ otteniamo

$$0 = \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} \quad \text{da cui} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

Per $x = \frac{1}{2}$ otteniamo

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi) \quad \text{da cui} \quad \frac{\pi^2}{12} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\,.$$

Sommando membro a membro troviamo che i termini di indice pari si elidono e risulta:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\,.$$

4 Compito di Analisi Matematica II del 4/05/09

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{A_\varepsilon} \mathrm{e}^{\dfrac{x-y}{x+y}} \, dxdy$$

dove $A_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \varepsilon \leq x+y \leq 2\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ \}$.
N.B.: Utilizzare un opportuno cambiamento di variabili.

2. Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - 2x$$

nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 2y^2 \leq 1\ ,\ 2x^2 + y^2 \leq 1\ \}$.

3. Risolvere il P.d.C. :

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{y}\,(y')^2 - y^2 \\ y(0) = -1 \quad , \quad y'(0) = 1\ . \end{cases}$$

N.B.: Attenzione alle condizioni iniziali!

4. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(x-1)^n}$$

e determinarne la somma.

Soluzione del compito del 4/05/09

1. Utilizziamo il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x+y=u\,, \\ x-y=v\,. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazione abbiamo $x=\frac{1}{2}(u+v)$ e $y=\frac{1}{2}(u-v)$ con le condizioni $\varepsilon \le u \le 2$, $u+v \ge 0$ e $u-v \ge 0$. La matrice Jacobiana è:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale $-\dfrac{1}{2}$. Allora l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned} \int_{A_\varepsilon} e^{\dfrac{x-y}{x+y}}\, dxdy &= \frac{1}{2}\int_\varepsilon^2 \int_{-u}^{u} \mathrm{e}^{\dfrac{v}{u}}\, dv\, du \\ &= \frac{1}{2}\int_\varepsilon^2 \left[u\,\mathrm{e}^{\dfrac{v}{u}} \right]_{-u}^{u} du = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^2 u\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) du \\ &= \left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[\frac{u^2}{4}\right]_\varepsilon^2 = \left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right), \end{aligned}$$

perciò il limite richiesto vale $\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

2. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} 8x-2=0 \\ 4y=0. \end{cases}$$

Troviamo $(\frac{1}{4},0)$ che appartiene all'interno del dominio e $f(\frac{1}{4},0)=-\frac{1}{4}$.

Sulla parte di frontiera $x^2+2y^2=1$ utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 8x-2-2\lambda x=0 \\ 4y-4\lambda y=0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases}(4-\lambda)x=1\\(1-\lambda)y=0\\x^2+2y^2=1\,.\end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $y=0$ oppure $\lambda=1$. Allora otteniamo i punti $(\pm1,0)$ e $(\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3})$. I primi non verificano la seconda disuguaglianza mentre nei secondi abbiamo $f(\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$.

Sulla parte di frontiera $2x^2+y^2=1$ utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange e otteniamo il sistema

$$\begin{cases}8x-2-4\lambda x=0\\4y-2\lambda y=0\\2x^2+y^2=1\end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases}(4-2\lambda)x=1\\(2-\lambda)y=0\\2x^2+y^2=1\,.\end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $y=0$ oppure $\lambda=2$. Allora otteniamo i punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ e nessuna soluzione per $\lambda=2$. Risulta $f(\frac{1}{\sqrt{2}},0)=2-\sqrt{2}$ e $f(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)=2+\sqrt{2}$.

Infine dobbiamo considerare i punti di intersezione dei due vincoli, cioè dobbiamo risolvere

$$\begin{cases}x^2+2y^2=1\\2x^2+y^2=1,\end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}})$, in cui f vale: $f(\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=2-\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $f(-\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=2+\frac{2}{\sqrt{3}}$. In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=2+\sqrt{2}=\max_A f\,,\qquad f\left(\frac{1}{4},0\right)=-\frac{1}{4}=\min_A f.$$

3. L'equazione differenziale è autonoma dunque usiamo la sostituzione $z(y(x))=y'(x)$ e $z'z=y''$, allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases}zz'=\dfrac{1}{y}\,z^2-y^2\\z(-1)=1,\end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Poiché $z = 0$ non è soluzione, possiamo dividere per z e otteniamo l'equazione di Bernoulli con $\alpha = -1$:

$$\begin{cases} z' = \dfrac{1}{y}\, z - \dfrac{y^2}{z} \\ z(-1) = 1. \end{cases}$$

Utilizziamo la sostituzione $w = z^2$, da cui $w' = 2z\, z'$. Allora, moltiplicando per z, dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} w' = \dfrac{2}{y}\, w - 2y^2 \\ w(-1) = 1. \end{cases}$$

Questa è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea Risolvendo l'equazione omogenea $w' = \dfrac{2}{y}\, w$ otteniamo

$$w = c\, \mathrm{e}^{\int \frac{2}{y}\, dy} = c\, \mathrm{e}^{2 \log |y|} = cy^2 \,.$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si ottiene risolvendo $c'(y)y^2 = -2y^2$, da cui $c(y) = -2y$ e la soluzione generale è $w = cy^2 - 2y^3$. Imponendo la condizione iniziale troviamo $c = -1$ e dunque $w = -y^2 - 2y^3$. Dunque, ricordandoci della condizione iniziale su z troviamo $z = \sqrt{-y^2 - 2y^3}$.

Ora dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} y' = \sqrt{-y^2 - 2y^3} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Separando le variabili e ricordando che y deve essere negativa in un intorno di 0 troviamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-y^2 - 2y^3}}\, dy = \int dx,$$

da cui

$$\int \frac{1}{-y\sqrt{-1 - 2y}}\, dy = x + k \,.$$

Per calcolare l'integrale usiamo la sostituzione $-1 - 2y = u^2$ da cui $-2\, dy = 2u\, du$ e $y = -\dfrac{u^2 + 1}{2}$, dunque

$$\int \frac{-2u}{(u^2 + 1)u}\, du = -2 \arctan u = x + k \,.$$

Ritornando nella variabile y e imponendo la condizione iniziale otteniamo $k = -\frac{\pi}{2}$ e la soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) .$$

4. Con la sostituzione $y = \dfrac{1}{1-x}$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{(x-1)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n y^n .$$

Questa serie di potenze converge assolutamente per $y \in (-1, 1)$, con convergenza totale negli intervalli chiusi $[-r, r]$ con $0 < r < 1$ e non converge negli estremi. Tornando nella variabile x abbiamo la convergenza assoluta per $|x - 1| > 1$. Dunque la serie converge puntualmente assolutamente in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e converge totalmente in $(-\infty, -r] \cup [2 + r, +\infty)$ per $r > 0$. La somma della serie è

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{(x-1)^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n y^n = y \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} = y \sum_{n=1}^{+\infty} D(y^n) = yD\left(\sum_{n=1}^{+\infty} y^n\right) \\ &= yD\Big(\frac{1}{1-y} - 1\Big) = \frac{y}{(1-y)^2} = \frac{1-x}{x^2} .\end{aligned}$$

5 Compito di Analisi Matematica II del 29/06/09

1. Determinare il massimo e il minimo della funzione così definita

$$f(x,y,z) = xy + z^2\,,$$

nell'insieme

$$B = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 1\,\}.$$

2. Risolvere il seguente P.d.C.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,. \end{cases}$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\iiint_E y\,dxdydz\,,$$

dove

$$E = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\,,\ y \ge 0\,\}\,.$$

4. Determinare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [-\pi, 0) \\ x(\pi - x) & \text{per } x \in [0,\pi]\,. \end{cases}$$

Precisare la convergenza puntuale e uniforme della serie ottenuta.

Soluzione del compito del 29/06/09

1. L'insieme B è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 2z = 0. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario interno è $(0, 0, 0)$, dove la funzione vale zero.

Sulla frontiera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo i punti stazionari della funzione $L(x, y, z, \lambda) = xy + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ 2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 2z(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ottiene $z = 0$ oppure $\lambda = 1$.

Nel caso $z = 0$, dalle prime due equazioni otteniamo $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$, per cui dall'ultima equazione otteniamo i punti $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ nei quali si ha

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}\,, \quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

Nel caso $\lambda = 1$, otteniamo $x = y = 0$ per cui $z = \pm 1$ ed allora

$$f(0, 0, \pm 1) = 1\,.$$

In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo:

$$f\,(0, 0, \pm 1) = 1 = \max_B f\,, \qquad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2} = \min_B f.$$

2. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata risolvendo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0\,.$$
Otteniamo $\lambda = -1 \pm 2\,i$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + c_2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x.$$
Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = A\ \mathrm{e}^{-x}$. Sostituendo nell'equazione troviamo $A = \dfrac{1}{4}$, perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + c_2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x + \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-x}\,.$$
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo
$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{4} = 1 \\ -c_1 + 2c_2 - \frac{1}{4} = 2\,. \end{cases}$$
Dunque la soluzione è
$$\frac{3}{4}\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + \frac{3}{2}\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x + \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-x}\ .$$

3. Calcoliamo l'integrale in coordinate cartesiane, integrando "per strati". Risulta
$$\begin{aligned}
\iiint_E y\,dxdydz &= \int_0^1 dz \int_{-z}^{z} dx \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} y\,dy \\
&= \int_0^1 dz \int_{-z}^{z} \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{z^2-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dz \int_{-z}^{z} (z^2 - x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[z^2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-z}^{z} dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (2z^3 - \frac{2}{3}\,z^3)\,dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{z^4}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}\,,
\end{aligned}$$
perciò l'integrale richiesto vale $\dfrac{1}{6}$.

4. La funzione non è pari né dispari dunque dovremo calcolare tutti i coefficienti di Fourier. Risulta $\omega = 1$ e dunque abbiamo, tenendo conto che la funzione vale zero in $[-\pi, 0]$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\, dx = \frac{\pi^2}{6} \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\, \cos(kx)\, dx \quad \text{(integrando per parti)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k^2} - \frac{\pi\, \cos(k\,\pi)}{k^2} + \frac{2\, \sin(k\,\pi)}{k^3}\right) \\
&= -\frac{1+(-1)^k}{k^2} \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\, \sin(kx)\, dx \quad \text{(integrando per parti)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{k^3} - \frac{2\, \cos(k\,\pi)}{k^3} - \frac{\pi\, \sin(k\,\pi)}{k^2}\right) = 2\frac{1-(-1)^k}{\pi k^3},
\end{aligned}$$

dunque la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1+(-1)^k}{k^2}\, \cos(kx) + 2\frac{1-(-1)^k}{\pi k^3}\, \sin(kx)\right).$$

Poiché la funzione è continua e regolare a tratti, la serie converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$.

La somma dei primi 11 termini della serie è riportata in Figura 2.

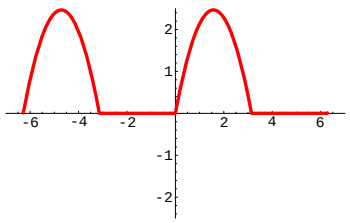


Figura 2: Somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f per $n = 10$.

6 Compito di Analisi Matematica II del 13/07/09

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y \tan x + \sqrt{y} \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_E \log(x^2 + y^2 + z)\, dxdydz \,,$$

dove

$$E = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 2 \,,\ 1 \le z \le 2 \,\} \,.$$

3. Trovare il massimo e il minimo assoluti e relativi (se esistono) della funzione

$$f(x, y) = x \log(x^2 + y^2) \,,$$

nell'insieme

$$E = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \,,\ 0 \le y \le x \,\}.$$

4. Studiare la convergenza della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2 x^2} \,.$$

Soluzione del compito del 13/07/09

1. L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = \frac{1}{2}$ e possiamo risolverla con la sostituzione $w = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{1/2}$ e dunque $w' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$. Dividendo l'equazione per $y^{1/2}$ e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} 2w' = 2w\tan x + 1 \\ w(0) = 1\,. \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} w' = w\tan x + \frac{1}{2} \\ w(0) = 1\,. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata $w' = w\tan x$ è $w = \dfrac{c}{\cos x}$. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\dfrac{c(x)}{\cos x}$ risolviamo $\dfrac{c'(x)}{\cos x} = \dfrac{1}{2}$ cioè $c'(x) = \dfrac{\cos x}{2}$, da cui $c(x) = \dfrac{\sin x}{2}$ e quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è $w = \dfrac{c}{\cos x} + \dfrac{\tan x}{2}$. Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 1$ e dunque $w = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\tan x}{2}$. In definitiva

$$y(x) = w(x)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan^2 x}{4} + \frac{\tan x}{\cos x}\,.$$

2. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali abbiamo $1 \le \varrho \le \sqrt{2}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $1 \le z \le 2$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned} &\iiint_E \log(x^2+y^2+z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\sqrt{2}} \varrho\,d\varrho \int_1^2 \log(\varrho^2+z)\,dz \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \left[(\varrho^2+z)\log(\varrho^2+z) - z\right]_1^2 \varrho\,d\varrho \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \Big((\varrho^2+2)\log(\varrho^2+2) - (\varrho^2+1)\log(\varrho^2+1) - 1\Big)\varrho\,d\varrho \overset{\varrho^2=t}{=} \\ &= \pi \int_1^2 \Big((t+2)\log(t+2) - (t+1)\log(t+1) - 1\Big)\,dt \\ &= \pi \left[\frac{(t+2)^2}{2}\log(t+2) - \frac{(t+1)^2}{2}\log(t+1) - t\right]_1^2 \\ &\quad - \pi \int_1^2 \left(\frac{(t+2)}{2} - \frac{(t+1)}{2}\right) dt = \frac{\pi}{2}\,(36\,\log 2 - 18\,\log 3 - 3)\,. \end{aligned}$$

3. La funzione f si può prolungare per continuità nell'origine in quanto nel triangolo E risulta $x\log(x^2) \le x\log(x^2+y^2) \le x\log(2x^2)$ e dunque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$

0. Dunque abbiamo una funzione continua definita su un insieme chiuso e limitato, perciò esistono il massimo e il minimo di f.

Siccome i punti in cui il gradiente di f si annulla devono risolvere

$$\frac{2\,x^2}{x^2+y^2} + \log(x^2+y^2) = 0\,, \qquad \frac{2\,x\,y}{x^2+y^2} = 0$$

dalla seconda equazione abbiamo $x = 0$ oppure $y = 0$. Per $x = 0$ otteniamo il vertice $(0, 0)$, per $y = 0$ otteniamo i punti della base del triangolo, dunque non esistono punti stazionari interni.

Studiamo la funzione sulla frontiera. Per $y = 0$ abbiamo $\varphi(x) = 2x \log x$ con $0 \le x \le 1$. Risulta $\varphi'(x) = 2\log x + 2$, allora $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ è un punto di minimo relativo sulla frontiera e $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. In $(1, 0)$ la funzione vale zero.

Sul lato $x = 1$ abbiamo $\varphi(y) = \log(1 + y^2)$ che è crescente e $f(1, 1) = \log 2$.

Infine sul lato $y = x$ abbiamo $\varphi(x) = x \log(2x^2)$ con $0 \le x \le 1$. Risulta $\varphi'(x) = \log(2x^2) + 2$, allora $2x^2 = \mathrm{e}^{-2}$, cioè $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt{2}}$ è un punto di minimo relativo sulla frontiera e $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}$.

Confrontando i valori ottenuti risulta che $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ è il minimo e $f(1, 1) = \log 2$ è il massimo.

4. Le funzioni sono tutte definite in $\mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$ e sono positive. Per studiare la convergenza puntuale, ricordando il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$, fissato $x \neq 0$, confrontiamo la serie data con la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, e otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n^2x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{x^2} \neq 0\,.$$

Dunque la serie converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$.

Per quanto riguarda la convergenza totale, naturalmente la serie non converge in $X = \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$ perché

$$\sup_{x\in X} \arctan \frac{1}{n^2x^2} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Per $r > 0$ consideriamo gli insiemi

$$X_r = (-\infty, -r] \cup [r, +\infty)\,.$$

Risulta, poiché le funzioni sono pari e decrescenti in $x \geq r$,

$$\sup_{x \in X_r} \arctan \frac{1}{n^2 x^2} = \arctan \frac{1}{n^2 r^2}$$

e per le considerazioni sulla convergenza puntuale la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2 r^2}$$

converge, perciò la serie data converge totalmente in ogni insieme X_r.

7 Compito di Analisi Matematica II del 7/09/09

1. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = 4-z$ nell'insieme

$$E = \left\{ (x,y,z) \,:\, x^2+y^2 = 8\,,\ x+y+z = 1 \right\}\,.$$

2. Calcolare

$$\iiint_A \left(x^2+y^2+z^2 \right)\, dxdydz\,,$$

dove

$$A = \left\{ (x,y,z) \,:\, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \right\}\,.$$

3. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y\,y'' = (y')^2\,\log(y') \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = \mathrm{e}\,. \end{cases}$$

4. Studiare la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}\,\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Soluzione del compito del 7/09/09

1. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. L'insieme E non ha punti interni.

   Dalla seconda equazione ricaviamo $z = 1 - x - y$ perciò, sostituendo nella funzione f, si tratta di cercare il massimo e il minimo della funzione $g(x, y) = 3 + x + y$ nell'insieme $B = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 8 \}$. Anche questo insieme B non ha punti interni, perciò usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione $L(x, y, \lambda) = 3 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 8)$ e otteniamo il sistema

   $$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

   Dalle prime due equazioni otteniamo

   $$x = \frac{1}{2\lambda}, \qquad y = \frac{1}{2\lambda},$$

   e sostituendo nella terza, si ha

   $$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2} = 8,$$

   e dunque $\lambda = \pm 1/4$.

   Sostituendo nelle espressioni di x e y si ha $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$. Calcolando il valore di g nei punti ottenuti abbiamo:

   $$g(2, 2) = 7, \quad g(-2, -2) = -1,$$

   ossia

   $$f(2, 2, -3) = 7, \qquad f(-2, -2, 5) = -1.$$

   Dunque $\max_E f = 7$ e $\min_E f = -1$.

   Alternativamente si potevano usare direttamente due moltiplicatori di Lagrange studiando la funzione

   $$L(x, y, z, \lambda, \mu) = 4 - z - \lambda(x^2 + y^2 - 8) - \mu(x + y + z - 1)$$

   ma il sistema sarebbe stato più lungo da risolvere.

2. Utilizziamo il cambiamento di variabili sferiche $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ il cui Jacobiano è $\varrho^2 \sin\varphi$. In questo sistema di coordinate l'insieme A diventa

$$\left\{ (\varrho, \vartheta, \varphi) \,:\, 0 \le \varrho \le 1\,,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\,,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \right\}.$$

Allora l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned}
\iiint_A \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \varrho^4 \sin\varphi \, d\varphi \, d\vartheta \, d\varrho \\
&= 2\pi \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1 \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{2\pi}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Alternativamente si possono usare le coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z) per cui lo Jacobiano è ϱ ma il calcolo è molto più lungo. In questo sistema di coordinate l'insieme A diventa

$$\left\{ (\varrho, \vartheta, z) \,:\, 0 \le \vartheta \le 2\pi\,, \varrho \le z \le \sqrt{1-\varrho^2} \right\}.$$

Allora dobbiamo risolvere $\varrho^2 = 1 - \varrho^2$, cioè $\varrho^2 = 1/2$, per cui l'insieme A diventa:

$$\left\{ (\varrho, \vartheta, z) \,:\, 0 \le \vartheta \le 2\pi\,,\ 0 \le \varrho \le \frac{1}{\sqrt{2}},\ \varrho \le z \le \sqrt{1-\varrho^2} \right\}.$$

In definitiva l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned}
\iiint_A \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_\varrho^{\sqrt{1-\varrho^2}} \left(\varrho^2+z^2\right) \varrho \, dz \, d\vartheta \, d\varrho \\
&= 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\varrho^2 z + \frac{z^3}{3}\right]_\varrho^{\sqrt{1-\varrho^2}} \varrho \, d\varrho \\
&= 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\varrho^2\sqrt{1-\varrho^2} + \frac{(\sqrt{1-\varrho^2})^3}{3} - \frac{4\varrho^3}{3}\right) \varrho \, d\varrho.
\end{aligned}$$

Sostituendo $\varrho^2 = t$, e quindi $2\varrho\, d\varrho = dt$, e integrando per parti, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\iiint_A \left(x^2+y^2+z^2\right)\, dxdydz = \pi \int_0^{1/2} \left(t\sqrt{1-t} + \frac{(1-t)^{3/2}}{3} - \frac{4}{3}\, t^{3/2}\right)\, dt \\
&= \pi \left(\left[-\frac{2}{3}\, t\,(1-t)^{3/2} - \frac{2(1-t)^{5/2}}{15} - \frac{8}{15}\, t^{5/2} \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{2}{3}\,(1-t)^{3/2}\, dt \right) \\
&= \pi \left(-\frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{30\sqrt{2}} + \frac{2}{15} - \frac{2}{15\sqrt{2}} - \left[\frac{4}{15}\,(1-t)^{5/2} \right]_0^{1/2} \right) \\
&= \pi \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{15} - \frac{1}{15\sqrt{2}} + \frac{4}{15} \right) = \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5\sqrt{2}} \right) = \frac{2\pi}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).
\end{aligned}$$

3. L'equazione differenziale è autonoma, dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$, da cui $y''(x) = z'(y(x))\, y'(x) = z'(y(x))\, z(y(x))$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y\, z\, z' = z^2\, \log z \\ z(1) = \mathrm{e}, \end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Poiché $z = 0$ e $z = 1$ non sono soluzioni, possiamo separare le variabili e otteniamo il P.d.C.:

$$\begin{cases} \dfrac{z'}{z\, \log z} = \dfrac{1}{y} \\ z(1) = \mathrm{e}, \end{cases}$$

Allora dobbiamo risolvere

$$\int \frac{dz}{z\, \log z} = \int \frac{1}{y}\, dy\,,$$

cioè

$$\log(\log z) = \log y + c, \quad \text{da cui} \quad \log z = ky.$$

Imponendo la condizione iniziale troviamo $k = \log \mathrm{e} = 1$ e dunque $z = \mathrm{e}^y$.

Ora dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Separando le variabili troviamo:

$$\int \mathrm{e}^{-y}\, dy = \int dx,$$

da cui

$$-\,\mathrm{e}^{-y} = x + k\,,$$

dunque

$$-y = \log(-x - k)\,.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $\log(-k) = -1$, cioè $k = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ e la soluzione è

$$y(x) = -\log\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - x\right)\,.$$

4. Le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, non negative e pari. La serie converge in 0 e per studiare la convergenza puntuale per $x \neq 0$ usiamo il criterio del rapporto. Risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{n+1}\,\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{x^{2n}}{n}\,\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 n}{n+1} = x^2\,.$$

Dunque la serie converge puntualmente per $|x| < 1$ e diverge positivamente per $|x| > 1$. Nei punti $x = \pm 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Grazie al limite notevole $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\log(1+y)}{y} = 1$, si può usare il criterio del confronto asintotico con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, che è una serie armonica generalizzata convergente. Pertanto la serie data converge puntualmente in $[-1, 1]$.

Per la convergenza totale si ha, per ogni $n \geq 1$,

$$M_n = \max_{x\in[-1,1]} \frac{x^{2n}}{n}\,\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n}\,\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

e per quanto già visto risulta $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$ pertanto la serie converge totalmente in $[-1, 1]$.

8 Compito di Analisi Matematica II del 9/11/09 (F.C.)

1. Risolvere il seguente Problema di Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{-x}\cos x \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Trovare (se esistono) massimo e minimo relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le y \le x\}$.

3. Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_S z\, d\sigma,$$

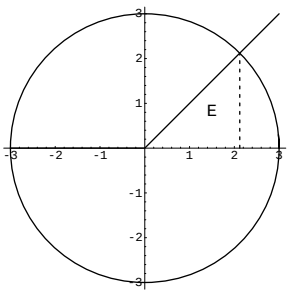
dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2 + y^2,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2–periodica definita nell'intervallo $[0,2)$ da $f(x) = 3x - x^2$. Dire se f è sviluppabile in serie di Fourier, determinarne la serie, precisando la somma e il tipo di convergenza.

Soluzione del compito del 9/11/09

1. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata risolvendo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0\,.$$
Otteniamo $\lambda = -1 \pm i$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos x + c_2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin x.$$
Poiché il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo
$$\overline{y}(x) = x\ \mathrm{e}^{-x}\ (A\ \cos x + B\ \sin x)\,.$$
Risulta
$$\overline{y}'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(A\ \cos x + B\ \sin x + x\big((-A+B)\ \cos x - (A+B)\ \sin x\big)\right)$$
$$\overline{y}''(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}\left((-A+B)\ \cos x - (A+B)\ \sin x + x\big(-B\ \cos x + A\ \sin x\big)\right).$$
Sostituendo nell'equazione troviamo $A = 0\,, B = 1$, perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos x + c_2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin x + x\ \mathrm{e}^{-x} \sin x.$$
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo
$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 1\,. \end{cases}$$
Dunque la soluzione è
$$\mathrm{e}^{-x}\ \cos x + 2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin x + x\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin x.$$

2. L'insieme E è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo.



La funzione non è differenziabile in $(0,0)$. Troviamo i punti interni al dominio in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y = 0. \end{cases}$$

Questo sistema non ha soluzioni.

Sulla frontiera $x^2+y^2=9$ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo i punti stazionari della funzione $L(x,y,\lambda) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1 - \lambda(x^2+y^2-9)$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases}$$

da cui, utilizzando la terza equazione,

$$\begin{cases} \dfrac{x(1-6\lambda)}{3} = 0 \\ \dfrac{y(1+6(1-\lambda))}{3} = 0 \\ x^2+y^2 = 9\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $x=0$ oppure $1-6\lambda=0$.

Nel caso $x=0$, dalla terza equazione segue che non ci sono soluzioni in E.

Nel secondo caso, $\lambda = \dfrac{1}{6}$ e dalla seconda equazione si ottiene $y=0$, quindi $x=3$. In questo punto $f(3,0)=2$.

Sul lato $y=0$ la funzione diventa $x-1$ con $0 \le x \le 3$. Essa è crescente ed allora $f(0,0)=-1$ e $(3,0)$ è già stato esaminato.

Sul lato $y=x$ la funzione diventa $x^2+\sqrt{2}x-1$ con $0 \le x \le \frac{3}{\sqrt{2}}$. Essendo crescente basta considerare $f\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{13}{2}$ perché $(0,0)$ è già stato esaminato.

In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo:

$$f(0,0) = -1 = \min_E f\,, \qquad f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{13}{2} = \max_E f.$$

3. Poiché la superficie $z = x^2 + y^2$ è cartesiana, l'elemento d'area è

$$\sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dxdy\,.$$

Allora l'integrale da calcolare è

$$\int_S z\, d\sigma = \iint_S (x^2 + y^2)\, \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy\,.$$

Calcoliamo l'integrale in coordinate polari. Risulta

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\sqrt{2}} \varrho^2 \sqrt{1 + 4\varrho^2}\, \varrho\, d\varrho\,.$$

Usiamo il cambiamento di variabile $t^2 = 1 + 4\varrho^2$, da cui $\varrho^2 = \dfrac{t^2 - 1}{4}$ e dunque $2\varrho\, d\varrho = \dfrac{t}{2}\, dt$. Allora otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_S z\, d\sigma &= 2\pi \int_{\sqrt{5}}^{3} \frac{t^2 - 1}{16} t^2\, dt = 2\pi \Big[\frac{t^5}{80} - \frac{t^3}{48}\Big]_{\sqrt{5}}^{3} \\ &= 2\pi \left(\frac{243}{80} - \frac{27}{48} - \frac{25\sqrt{5}}{80} + \frac{5\sqrt{5}}{48}\right) = \pi \left(\frac{99}{20} - \frac{5\sqrt{5}}{12}\right)\,.\end{aligned}$$

4. La funzione non è pari né dispari dunque dovremo calcolare tutti i coefficienti di Fourier. Risulta $\omega = \pi$ e dunque abbiamo:

$$a_0 = \int_0^2 (3x - x^2)\, dx = \frac{10}{3}\,,$$

e per $k \geq 1$ otteniamo (integrando per parti):

$$\begin{aligned}a_k &= \int_0^2 (3x - x^2)\, \cos(k\pi x)\, dx \\ &= \left[(3x - x^2)\, \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^2 - \int_0^2 (3 - 2x)\, \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\, dx\end{aligned}$$

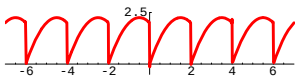
$$
\begin{aligned}
&= \left[(3-2x)\frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right]_0^2 + 2\int_0^2 \frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}\,dx \\
&= -\frac{4}{k^2\pi^2} + 2\left[\frac{\sin(k\pi x)}{k^3\pi^3}\right]_0^2 = -\frac{4}{k^2\pi^2}\,, \\
b_k &= \int_0^2 (3x-x^2)\,\sin(k\pi x)\,dx \\
&= \left[-(3x-x^2)\,\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^2 + \int_0^2 (3-2x)\,\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx \\
&= -\frac{2}{k\pi} + \left[(3-2x)\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right]_0^2 + 2\int_0^2 \frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}\,dx \\
&= -\frac{2}{k\pi} - 2\left[\frac{\cos(k\pi x)}{k^3\pi^3}\right]_0^2 = -\frac{2}{k\pi}\,,
\end{aligned}
$$

dunque la serie di Fourier di f è

$$
\frac{10}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{k^2\pi^2}\,\cos(k\pi x) - \frac{2}{k\pi}\,\sin(k\pi x)\right).
$$

Poiché la funzione è regolare a tratti, la serie converge puntualmente al prolungamento $2-$periodico di f su $\mathbb{R}$ meno gli interi pari, dove converge a 1. La serie converge uniformemente negli intervalli chiusi che non contengono interi pari.

La somma dei primi 101 termini della serie è riportata in Figura seguente.



9 Compito di Analisi Matematica II del 10/12/09

1. Calcolare il seguente integrale triplo per $h, a > 0$:

$$\iiint_E x\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \le a^2\,,\ x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ 0 \le z \le \frac{h}{a}\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right) \right\}.$$

2. Trovare il massimo e il minimo assoluti (se esistono) della funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$

nell'insieme $E = \{(x,y) :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

3. Risolvere il P.d.C. :

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{t} = y^2 \sin t \\ y(\pi/2) = 1\,. \end{cases}$$

4. Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni la funzione f definita nell'intervallo $[0,1]$ da

$$f(x) = x(1-x)$$

Precisare gli intervalli di convergenza puntuale e uniforme della serie ottenuta.

Soluzione del compito del 10/12/09

1. Utilizziamo le coordinate cilindriche. In questo sistema di di coordinate l'insieme è dato da:

$$\left\{(\varrho,\vartheta,z)\,;\ 0\le\varrho\le a\,,\ 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}\,,\ 0\le z\le\frac{h}{a}\,(a-\varrho)\right\}.$$

Allora l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^a\varrho\,d\varrho\int_0^{h(a-\varrho)/a}\varrho\,\cos\vartheta\,dz &= \int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^a\varrho^2\,\cos\vartheta\Big[z\Big]_0^{h(a-\varrho)/a}d\varrho\\ &= \frac{h}{a}\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^a\left(a\,\varrho^2-\varrho^3\right)\cos\vartheta\,d\varrho\\ &= \frac{h}{a}\int_0^{\pi/2}\left[a\,\frac{\varrho^3}{3}-\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^a\cos\vartheta\,d\vartheta\\ &= \frac{h}{a}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}\right)\cos\vartheta\,d\vartheta\\ &= \frac{h\,a^3}{12}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta=\frac{h\,a^3}{12}\,.\end{aligned}$$

2. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases}2x=0\\-3y^2=0\,,\end{cases}$$

Otteniamo il punto $(0,0)$ che non appartiene al dominio E.

Sulla parte di frontiera $x^2+y^2=1$ utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange e otteniamo il sistema

$$\begin{cases}2x-2\lambda x=0\\-3y^2-2\lambda y=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}2(1-\lambda)x=0\\(3y+2\lambda)y=0\\x^2+y^2=1\,.\end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $x=0$ oppure $\lambda=1$. Allora otteniamo i punti $(0,\pm1)$ e, nel caso $\lambda=1$, dalla seconda e terza equazione si ottengono $(\pm1,0)$ e $(\pm\frac{\sqrt{5}}{3},-\frac{2}{3})$ e in questi punti la funzione vale

$$f(0,\pm1)=\mp1\,,\quad f(\pm1,0)=1\,,\quad f\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3},-\frac{2}{3}\right)=\frac{23}{27}\,.$$

Sulla parte di frontiera $x^2 + y^2 = 4$ utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -3y^2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2(1-\lambda)x = 0 \\ (3y + 2\lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $x = 0$ oppure $\lambda = 1$. Allora otteniamo i punti $(0, \pm 2)$ e, nel caso $\lambda = 1$, dalla seconda e terza equazione si ottengono $(\pm 2, 0)$ e $(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3})$ e in questi punti la funzione vale

$$f(0, \pm 2) = \mp 8\,, \quad f(\pm 2, 0) = 4\,, \quad f\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{104}{27}\,.$$

In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo:

$$f\,(0, -2) = 8 = \max_E f\,, \qquad f\,(0, 2) = -8 = \min_E f.$$

3. L'equazione differenziale è un'equazione di Bernoulli; poiché $y = 0$ non è soluzione, possiamo dividere per y^2 e otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{y\,t} = \sin t \\ y(\pi/2) = 1\,. \end{cases}$$

Utilizziamo la sostituzione $w = y^{-1}$, da cui $w' = -y^{-2}\,y'$. Allora otteniamo il problema lineare:

$$\begin{cases} -w' - \dfrac{w}{t} = \sin t \\ w(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione omogenea $w' + \dfrac{w}{t} = 0$ e, tenendo conto che ci interessa il caso $t > 0$, otteniamo

$$A(t) = \int \frac{1}{t}\,dt = \log t \qquad \Rightarrow \qquad w = c\ \mathrm{e}^{-A(t)} = \frac{c}{t}\,.$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si ottiene risolvendo $\dfrac{1}{t}c'(t) = -\sin t$, da cui $c'(t) = -t\,\sin t$ e dunque, integrando per parti,

$$c(t) = -\int t\,\sin t\,dt = t\,\cos t - \int \cos t\,dt = t\,\cos t - \sin t$$

ed allora la soluzione generale è $w(t) = \dfrac{c}{t} + \cos t - \dfrac{\sin t}{t}$.
Imponendo la condizione iniziale troviamo $\dfrac{2}{\pi}\, c - \dfrac{2}{\pi} = 1$ e dunque $w = \dfrac{\pi+2}{2t} + \cos t - \dfrac{\sin t}{t}$. Dunque la soluzione del problema assegnato è:

$$y(t) = \frac{2t}{\pi + 2 + 2t\,\cos t - 2\sin t}\,.$$

4. Per ottenere lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni, dobbiamo considerare il prolungamento pari f_p della funzione e dunque abbiamo $T = 2$ e $\omega = \pi$. Per la parità degli integrandi, i coefficienti di Fourier sono:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-1}^{1} f_p(x)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{3}\\
a_k &= \int_{-1}^{1} f_p(x)\,\cos(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 (x-x^2)\,\cos(k\pi x)\,dx\\
&= 2\left[\frac{1}{k\pi}\,(x-x^2)\,\sin(k\pi x)\right]_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 (1-2x)\,\sin(k\pi x)\,dx\\
&= \left[\frac{2}{k^2\pi^2}\,\cos(k\pi x)\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{k^2\pi^2}\,x\,\cos(k\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{k^2\pi^2}\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx\\
&= \frac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1) - \frac{4}{k^2\pi^2}\,(-1)^k = -\frac{2}{k^2\pi^2}(1 + (-1)^k)\,.
\end{aligned}$$

Dunque la serie di Fourier è

$$\frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi x)\,.$$

Siccome i coefficienti di indice dispari si annullano, essa si può riscrivere come

$$\frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{(2h)^2}\cos(2h\pi x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{h^2}\cos(2h\pi x)\,.$$

Questa serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ poiché la funzione f_p è continua. La serie converge anche totalmente.

10 Compito di Analisi Matematica II del 12/01/10

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - xy = x^3 y^2 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{z+1}+1}\, dxdydz\,,$$

dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

3. Trovare il massimo e il minimo assoluti e relativi (se esistono) della funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^2 - y)$$

nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq x\}$.

4. Studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_n$ così definita

$$f_n(x) = e^{-nx} \arctan(nx), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione del compito del 12/01/10

1. L'equazione differenziale è un'equazione di Bernoulli; poiché $y = 0$ non è soluzione del P.d.C., possiamo dividere per y^2 e otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{x}{y} = x^3 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Utilizziamo la sostituzione $w = y^{-1}$, da cui $w' = -y^{-2}\,y'$. Allora otteniamo il problema lineare:

$$\begin{cases} -w' - xw = x^3 \\ w(0) = 1. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione omogenea $w' + xw = 0$ otteniamo

$$A(t) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad w = c\ \mathrm{e}^{-A(x)} = c\ \mathrm{e}^{-x^2/2}\ .$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si ottiene risolvendo $\mathrm{e}^{-x^2/2}\,c'(x) = -x^3$, da cui $c'(x) = -x^3\,\mathrm{e}^{x^2/2}$ e dunque, integrando per parti,

$$c(x) = -\int x^3\,\mathrm{e}^{x^2/2}\ dx = -x^2\,\mathrm{e}^{x^2/2} + \int 2x\,\mathrm{e}^{x^2/2}\ dx = -x^2\,\mathrm{e}^{x^2/2} + 2\,\mathrm{e}^{x^2/2}$$

ed allora la soluzione generale è $w(x) = c\ \mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2 + 2$.
Imponendo la condizione iniziale troviamo $c+2 = 1$ e dunque $w = -\,\mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2 + 2$. Dunque la soluzione del problema assegnato è:

$$y(x) = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2}\,.$$

2. Utilizziamo le coordinate cilindriche. In questo sistema di coordinate l'insieme è dato da:

$$\left\{(\varrho, \vartheta, z)\,;\ 0 \le z \le 1\,,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\,,\ 0 \le \varrho^2 \le z\right\}\ .$$

Allora l'integrale da calcolare è:

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z+1}+1}\,dz \int_0^{\sqrt{z}} \varrho^3\,d\varrho = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z+1}+1}\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{z}} dz$$
$$= \frac{1}{2}\pi \int_0^1 \frac{z^2}{\sqrt{z+1}+1}\,dz \quad \text{usando la sostituzione } z+1=t^2,$$
$$= \pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)^2 t}{t+1}\,dt = \pi \int_1^{\sqrt{2}} (t-1)^2(t+1)\,t\,dt$$
$$= \pi \int_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^3-t^2+t)\,dt = \pi \left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-1-\frac{2\sqrt{2}}{3}+1-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = \pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{15}-\frac{7}{60}\right).$$

3. L'insieme è chiuso ma non limitato, quindi non è garantita l'esistenza del massimo e del minimo. La funzione assume valori in $(-\pi/2, \pi/2)$. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1+(x^2-y)^2} = 0 \\ -\dfrac{1}{1+(x^2-y)^2} = 0\,, \end{cases}$$

Poiché la seconda equazione non ha soluzioni, non esistono punti stazionari interni.

Sulla parte di frontiera con $y = 0$ e $x \geq 0$ la funzione diventa $\arctan x^2$, che è strettamente crescente, dunque ha il minimo in $(0,0)$ con valore 0, e l'estremo superiore è $\pi/2$.

Sulla frontiera con $y = x$ e $x \geq 0$ la funzione diventa $\arctan(x^2-x)$, e la derivata è $\dfrac{2x-1}{1+(x^2-x)^2}$. La derivata è negativa per $x \in (0, 1/2)$ e positiva in $(1/2, +\infty)$. Risulta $f(1/2, 1/2) = -\arctan(1/4)$.

Pertanto la funzione ha minimo in $(1/2, 1/2)$, non ha massimo e l'estremo superiore è $\pi/2$.

4. Risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall\, x \geq 0, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty \quad \forall\, x < 0,$$

pertanto la successione converge puntualmente alla funzione nulla in $[0, +\infty)$ e diverge negativamente in $(-\infty, 0)$. Per studiare la convergenza uniforme calcoliamo le derivate di f_n. Risulta

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -n\,\mathrm{e}^{-nx}\arctan(nx) + \mathrm{e}^{-nx}\,\frac{n}{1+(nx)^2} \\ &= n\,\mathrm{e}^{-nx}\,\frac{-(1+(nx)^2)\arctan(nx)+1}{1+(nx)^2}. \end{aligned}$$

Dunque le funzioni f_n hanno i punti di massimo per

$$\arctan(nx) = \frac{1}{1+(nx)^2}\,,$$

pertanto i punti di massimo x_n tendono a zero (vedere la figura 3). Poiché è difficile determinare il massimo di f_n, osserviamo che

$$\max f_n \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}^{-1}\arctan 1 = \frac{\pi}{4\,\mathrm{e}},$$

quindi la successione non converge uniformemente in $[0, +\infty)$, mentre converge uniformemente a zero in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

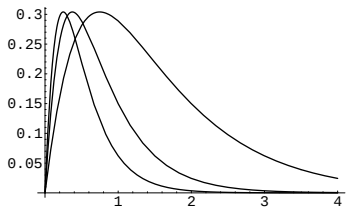


Figura 3: I primi tre termini della successione (f_n).

Parte II
A.A. 2009/10 – Corso D.M.270

Soluzione dei compiti di Analisi Matematica II (D.M.270)

11 Compito di Analisi Matematica II del 12/02/10

1. Risolvere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 4y = y^3 \\ y(0) = \alpha \,, \end{cases}$$

precisando se la soluzione è locale o globale.

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, z \, dxdydz \,,$$

dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

3. Trovare il massimo e il minimo assoluti e relativi (se esistono) della funzione

$$f(x, y, z) = xy + z^2$$

nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ z \geq 0\}$.

4. Stabilire se per la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x + 5}$$

è definita la trasformata di Fourier e, in caso affermativo, calcolarla.

Soluzione del compito del 12/02/10

1. L'equazione differenziale è a variabili separabili (o anche un'equazione di Bernoulli); per essa vale il teorema di esistenza e unicità locale, mentre non sono verificate le ipotesi per avere l'esistenza globale.
   Possiamo riscriverla come

$$y' = y^3 - 4y = y(y^2 - 4) = y(y-2)(y+2)\,,$$

   quindi $y = 0$, $y = 2$ e $y = -2$ sono soluzioni stazionarie (e dunque globali). Per $\alpha \neq 0, \pm 2$ risolviamo

$$\frac{y'}{y(y-2)(y+2)} = 1\,,$$

   e quindi

$$\int \frac{dy}{y(y-2)(y+2)} = \int dx\,.$$

   Utilizzando il metodo dei fratti semplici otteniamo

$$\frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{y-2} + \frac{1}{y+2} - \frac{2}{y}\right) dy = x + c$$

   da cui

$$\frac{1}{8}\log\left(\frac{|y^2-4|}{y^2}\right) = x + c$$

   e quindi

$$\frac{|y^2-4|}{y^2} = C\,\mathrm{e}^{8x}\,.$$

   Imponendo la condizione iniziale nel caso $|\alpha| > 2$ otteniamo

$$\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2} = C$$

   e dunque

$$y^2 - 4 = \frac{\alpha^2-4}{\alpha^2}\,y^2\,\mathrm{e}^{8x} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2-4)\,\mathrm{e}^{8x}}}\,.$$

   Poiché il coefficiente di e^{8x} è negativo, la soluzione è locale.
   Imponendo la condizione iniziale nel caso $|\alpha| < 2$ otteniamo

$$\frac{4-\alpha^2}{\alpha^2} = C$$

e dunque

$$y^2 - 4 = \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2}\, y^2\, \mathrm{e}^{8x} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - 4)\, \mathrm{e}^{8x}}}\,.$$

Poiché il coefficiente di e^{8x} è positivo, la soluzione è globale.

2. Utilizziamo le coordinate sferiche. In questo sistema di coordinate otteniamo $0 \le \varrho \le 1$ e $\varrho \cos\varphi \ge \sqrt{\varrho^2 \sin^2\varphi} = \varrho \sin\varphi$, per cui l'insieme è dato da:

$$\{(\varrho, \vartheta, \varphi)\,;\ 0 \le \varphi \le \pi/4\,,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\,,\ 0 \le \varrho \le 1\}\ .$$

Allora l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^1 \varrho^2 \sin^2\varphi\, \varrho \cos\varphi\, \varrho^2 \sin\varphi\, d\varrho \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/4} \cos\varphi\, \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^1 \varrho^5\, d\varrho = 2\pi \left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\pi/4} \\
&= 2\pi\, \frac{1}{6}\, \frac{1}{16} = \frac{\pi}{48}\,.
\end{aligned}$$

3. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione f è continua, quindi è garantita l'esistenza del massimo e del minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0\,, \end{cases}$$

dove $f(0,0,0) = 0$. Consideriamo il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La funzione di Lagrange è

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)\,.$$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ 2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 2z(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\,. \end{cases}$$

Dalla terza equazione otteniamo $z = 0$ oppure $\lambda = 1$.
Nel caso $z = 0$, abbiamo $x = 4\lambda^2 x$ e dunque $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$, cioè $y = \pm x$. Dalla quarta equazione otteniamo i punti $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$ dove f vale 2 e i punti $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, 0)$ dove f vale -2.
Nel caso $\lambda = 1$, abbiamo $x = 4x$ e dunque $x = y = 0$, e allora dalla quarta equazione otteniamo il punto $(0, 0, 2)$ dove f vale 4.
Poiché sul vincolo $z = 0$ ritroviamo punti già ottenuti, possiamo concludere che la funzione ha minimo in $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, 0)$ pari a -2 e ha massimo in $(0, 0, 2)$ dove f vale 4.

4. La funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ in quanto il denominatore non si annulla in $\mathbb{R}$ e all'infinito tende a zero come $\dfrac{1}{x}$. Pertanto la sua trasformata di Fourier è definita nel senso di $L^2(\mathbb{R})$.
Osserviamo che

$$f(x) = x\,\frac{1}{x^2 + 4x + 5} = x\,\frac{1}{1 + (x+2)^2}$$

perciò calcoliamone la trasformata di Fourier utilizzando le regole di trasformazione. Posto $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, si ha $\hat{h}(\xi) = \pi\ \mathrm{e}^{-|\xi|}$. Allora, indicata con g la funzione $\dfrac{1}{1+(x+2)^2} = h(x+2)$, otteniamo

$$\hat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{2\,i\,\xi}\,\pi\ \mathrm{e}^{-|\xi|} = \pi\ \mathrm{e}^{2\,i\,\xi - |\xi|}\,.$$

Infine, poiché $f(x) = x\,g(x)$, allora

$$\hat{f}(\xi) = i\,\frac{d}{d\xi}\,\hat{g}(\xi) = i\,\pi\ \mathrm{e}^{2\,i\,\xi - |\xi|}(2\,i - \mathrm{sgn}(\xi)).$$

12 Compito di Analisi Matematica II del 26/02/10

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 4\ \mathrm{e}^{-t} \cos 2t \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ y \leq 1 - x^2\,,\ x + y + 1 \geq 0\,,\ 0 \leq z \leq x + y + 1\}\,.$$

3. Trovare il massimo e il minimo assoluti (se esistono) della funzione

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

sulla superficie sferica $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

4. Determinare (se esiste) la trasformata di Laplace inversa della funzione

$$f(s) = \frac{2s + 3}{s^3 - 6s^2 + 8s}\,.$$

Soluzione del compito del 26/02/10

1. L'equazione differenziale è del secondo ordine, lineare, non omogenea. La sua equazione caratteristica è
$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0\,.$$
Otteniamo $\lambda = -1 \pm 2i$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + c_2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x.$$
Poiché il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\overline{y}(x) = x\ \mathrm{e}^{-x}\ (A\ \cos 2x + B\ \sin 2x)$. Risulta
$$\begin{aligned}
\overline{y}'(x) &= \mathrm{e}^{-x}\left(A\ \cos 2x + B\ \sin 2x + x\left((2B - A)\ \cos 2x - (2A + B)\ \sin 2x\right)\right)\\
\overline{y}''(x) &= \mathrm{e}^{-x}\Big((-2A + 4B)\ \cos 2x - (4A + 2B)\ \sin 2x\\
&\qquad + x\left(-(3A + 4B)\ \cos 2x + (4A - 3B)\ \sin 2x\right)\Big)\,.
\end{aligned}$$
Sostituendo nell'equazione, tenendo presente che i termini contenenti il fattore x si semplificano, troviamo $A = 0\,, B = 1$, perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + c_2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x + x\ \mathrm{e}^{-x} \sin 2x.$$
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo
$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + 2c_2 = 1\,. \end{cases}$$
Dunque la soluzione è
$$\mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x + x\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x.$$

2. Dalle prime due disuguaglianze otteniamo:
$$-x - 1 \le 1 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x - 2 \le 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 \le x \le 2\,.$$

Allora l'integrale da calcolare è:

$$\int_{-1}^{2} dx \int_{-x-1}^{1-x^2} dy \int_{0}^{x+y+1} dz = \int_{-1}^{2} dx \int_{-x-1}^{1-x^2} (x+y+1)\, dy$$
$$= \int_{-1}^{2} \left[xy + \frac{y^2}{2} + y \right]_{-x-1}^{1-x^2} dx$$
$$= \int_{-1}^{2} \left(x(1-x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)^2 + 1 - x^2 + x(x+1) - \frac{1}{2}(1+x)^2 + x + 1 \right) dx$$
$$= \int_{-1}^{2} \left(2 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx$$
$$= \left[2x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5 \right]_{-1}^{2} = \frac{81}{20}\,.$$

3. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione f è continua, quindi è garantita l'esistenza del massimo e del minimo. L'insieme non ha punti interni. Consideriamo il vincolo $x^2+y^2+z^2=4$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La funzione di Lagrange è

$$L(x,y,z,\lambda) = x + y - z - \lambda(x^2+y^2+z^2-4)\,.$$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 1-2\lambda x = 0 \\ 1-2\lambda y = 0 \\ -1-2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4\,, \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ z = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y = -z \\ 3x^2 = 4\,. \end{cases}$$

Dunque abbiamo $x = y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $z = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$. In questi due punti la funzione f vale $f(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}$ e $f(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = -2\sqrt{3}$.
Possiamo concludere che la funzione ha minimo pari a $-2\sqrt{3}$ e ha massimo pari a $2\sqrt{3}$.

4. Il denominatore di f si annulla in 0, 2 e 4, quindi per calcolare l'antitrasformata di Laplace possiamo utilizzare la formula di Heaviside. Si ha:

$$F(t) = \frac{1}{8}\left(3 - 14\,\mathrm{e}^{2t} + 11\,\mathrm{e}^{4t}\right) H(t)\,.$$

Alternativamente basta determinare la decomposizione in fratti semplici della funzione f, ottenendo:

$$f(s) = \frac{3}{8s} - \frac{7}{4(s-2)} + \frac{11}{8(s-4)}$$

quindi, utilizzando la trasformata della funzione di Heaviside $\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}$ e la regola sulla trasformata della modulazione si ottiene il risultato.

13 Compito di Analisi Matematica II del 26/02/10 (D.M. 509)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 4\ \mathrm{e}^{-t} \cos 2t \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ y \leq 1 - x^2\,,\ x + y + 1 \geq 0\,,\ 0 \leq z \leq x + y + 1\}\,.$$

3. Trovare il massimo e il minimo assoluti (se esistono) della funzione

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

sulla superficie sferica $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

4. Determinare la serie di Fourier della funzione 2-periodica, definita in $[-1, 1]$ da $f(x) = 1 - x^2$.

Soluzione del compito del 26/02/10 (D.M.509)

1. 2. 3. Vedi soluzione compito precedente.

4. La funzione f è pari perciò dobbiamo calcolare solo i coefficienti a_h ($h \in \mathbb{N}$). Si ha $\omega = \pi$ dunque

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

e per $h > 0$

$$\begin{aligned} a_h &= \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \cos(h\pi x)\, dx = \left[(1 - x^2)\, \frac{\sin(h\pi x)}{h\pi} \right]_{-1}^{1} \\ &\quad + \int_{-1}^{1} 2x\, \frac{\sin(h\pi x)}{h\pi}\, dx \\ &= -\left[2x\, \frac{\cos(h\pi x)}{h^2\pi^2} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2\, \frac{\cos(h\pi x)}{h^2\pi^2}\, dx \\ &= -4\, \frac{(-1)^h}{h^2\pi^2} + \left[2\, \frac{\sin(h\pi x)}{h^3\pi^3} \right]_{-1}^{1} = 4\, \frac{(-1)^{h+1}}{h^2\pi^2}\,. \end{aligned}$$

Siccome la funzione f è continua e regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ e si ha

$$f(x) = \frac{2}{3} + 4 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h^2\pi^2}\, \cos(h\pi x)\,.$$

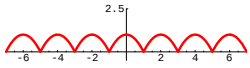


Figura 4: Somma dei primi 100 termini della serie di Fourier.

14 Compito di Analisi Matematica II del 30/04/10

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4ty \log y}{t^2 - 1} \\ y(0) = \mathrm{e} \ . \end{cases}$$

2. Calcolare l'area della superficie con sostegno $z = xy$ all'interno del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$.

3. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto e relativo (se esistono) della funzione

$$f(x, y) = \frac{2(x + y) - 1}{x^2 + y^2}$$

nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \neq 0 \}$.

4. Determinare (se esiste) la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 5} \, .$$

Soluzione del compito del 30/04/10

1. L'equazione differenziale è a variabili separabili. Dunque abbiamo

$$\int \frac{1}{y \log y}\, dy = \int \frac{4\,t}{t^2-1}\, dt$$

da cui

$$\log|\log y| = 2\,\log(t^2-1) + c,$$

e, considerando l'esponenziale di ambo i membri,

$$|\log y| = k\,(t^2-1)^2.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $1 = k$ e dunque (eliminando il valore assoluto e considerando l'esponenziale di ambo i membri) la soluzione è

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t^2-1)^2}\,.$$

2. La superficie S è il grafico della funzione $z = f(x,y) = x\,y$ sul dominio $B = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le 4\}$. Dunque l'area della superficie si ottiene calcolando l'integrale

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(S) &= \iint_B \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\, dxdy = \iint_B \sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+\varrho^2}\,\varrho\, d\varrho\, d\vartheta \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{3}(1+\varrho^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).\end{aligned}$$

3. L'insieme E non è chiuso né limitato, la funzione f è continua in E, quindi dobbiamo studiare il limite di f in $(0,0)$ e all'infinito.
Risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2(x+y)-1}{x^2+y^2} = -\infty\,, \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{2(x+y)-1}{x^2+y^2} = 0.$$

Dunque la funzione non ha minimo. Poiché $f(1,1) = \frac{3}{2} > 0$, la funzione ha massimo. Cerchiamo i punti critici della funzione. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{2(x^2+y^2)-2x(2(x+y)-1)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y^2-2x^2-4xy+2x}{(x^2+y^2)^2} = 0 \\ f_y(x,y) = \dfrac{2(x^2+y^2)-2y(2(x+y)-1)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^2-2y^2-4xy+2y}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

Dunque abbiamo

$$\begin{cases} 2y^2 - 2x^2 - 4xy + 2x = 0 \\ 2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -4xy + x + y = 0 \\ 4x^2 - 4y^2 + 2(y - x) = 0\,, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} -4xy + x + y = 0 \\ 4(x + y)(x - y) + 2(y - x) = 0 = 2(x - y)((x + y) - 1)\,. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} -4x^2 + 2x = -2x(2x - 1) = 0 \\ x = y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = y = \frac{1}{2},$$

oppure

$$\begin{cases} -4x(1 - x) + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 0 \\ (x + y) - 1 = 0. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = y = \frac{1}{2}.$$

In quest'unico punto la funzione f vale $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$ e possiamo concludere che la funzione ha massimo pari a 2 ed è illimitata inferiormente.

4. La funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ e possiamo usare le regole di trasformazione. Risulta

$$f(x) = \frac{2(x - 1) + 5}{(x - 1)^2 + 4}\,.$$

Posto

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 4} = \frac{1}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right)}\,,$$

risulta

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-2|\xi|}\,.$$

Posto

$$h(x) = \frac{x}{x^2 + 4}\,,$$

risulta

$$\hat{h}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-2|\xi|}\right) = -i\,\pi\,\mathrm{e}^{-2|\xi|}\,\mathrm{sign}(\xi)\,.$$

In definitiva

$$\hat{f}(\xi) = -2i\,\pi\,\mathrm{e}^{-2|\xi| - i\xi}\,\mathrm{sign}(\xi) + \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-2|\xi| - i\xi} = \left(-2i\mathrm{sign}(\xi) + \frac{5}{2}\right)\,\pi\,\mathrm{e}^{-2|\xi| - i\xi}\,.$$

15 Compito di Analisi Matematica II del 30/04/10 (D.M. 509)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4ty\log y}{t^2-1} \\ y(0) = \mathrm{e}\ . \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

dove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1\,,\ x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ z \ge 0\,\}\,.$$

3. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto e relativo (se esistono) della funzione

$$f(x,y) = \frac{2(x+y)-1}{x^2+y^2}$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \neq 0\,\}$.

4. Determinare la serie di Fourier della funzione 6-periodica, definita in $[-3,3)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -3 \le x < 0 \\ 2x & \text{se} \quad 0 \le x < 3. \end{cases}$$

Dedurre dal risultato ottenuto la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Soluzione del compito del 30/04/10 (D.M.509)

1. Vedi soluzione compito precedente.

2. Utilizziamo le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \varrho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \varrho \cos\varphi \,. \end{cases}$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \varrho^3 \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

3. Vedi soluzione compito precedente.

4. La funzione f è regolare a tratti e 6-periodica.. Si ha $\omega = \frac{\pi}{3}$ dunque

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x)\, dx = \frac{1}{3} \left[x^2 \right]_0^3 = 3$$

e per $h > 0$

$$\begin{aligned} a_h &= \frac{1}{3} \int_0^3 2x \, \cos(h\omega x)\, dx = \frac{1}{3} \left[2x \, \frac{\sin(h\omega x)}{h\omega} \right]_0^3 \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_0^3 2 \, \frac{\sin(h\omega x)}{h\omega} \, dx \\ &= \frac{1}{3} \left[2 \, \frac{\cos(h\omega x)}{h^2\omega^2} \right]_0^3 = 6 \, \frac{(-1)^h - 1}{h^2\pi^2} \,. \end{aligned}$$

Analogamente, per $h > 0$

$$\begin{aligned} b_h &= \frac{1}{3} \int_0^3 2x \, \sin(h\omega x)\, dx = \frac{1}{3} \left[-2x \, \frac{\cos(h\omega x)}{h\omega} \right]_0^3 \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_0^3 2 \, \frac{\cos(h\omega x)}{h\omega} \, dx \\ &= (-1)^{h+1} \, \frac{6}{h\pi} + \frac{1}{3} \left[2 \, \frac{\sin(h\omega x)}{h^2\omega^2} \right]_0^3 = (-1)^{h+1} \, \frac{6}{h\pi} \,. \end{aligned}$$

Siccome la funzione f è discontinua nei punti $3+6h$ per $h \in \mathbb{Z}$, la sua serie di Fourier converge in tali punti al valore 3 e converge uniformemente negli intervalli chiusi contenuti in $\mathbb{R} \setminus \{3+6h\,;\, h \in \mathbb{Z}\}$. Si ha

$$\tilde{f}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} \left(6\,\frac{(-1)^h - 1}{h^2\pi^2}\,\cos(h\omega x) + (-1)^{h+1}\,\frac{6}{h\pi}\,\sin(h\omega x) \right) .$$

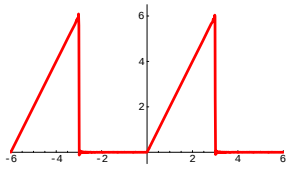


Figura 5: Una somma parziale della serie di Fourier.

Per $x = 0$ si ottiene

$$0 = \frac{3}{2} + 6 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h - 1}{h^2\pi^2} = \frac{3}{2} - 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2}$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

16 Compito di Analisi Matematica II del 10/05/10 (F.C.)

1. Determinare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \mathrm{e}^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e di minimo assoluti e relativi della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2$$

nell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 1\,\}\,.$$

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_E \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

dove E è la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.

4. Studiare il tipo di convergenza e calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}(n+1)}\,.$$

Soluzione del compito del 10/05/10 (F.C. - D.M.509)

1. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata risolvendo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 - 1 = 0\,.$$
Otteniamo $\lambda = \pm 1$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x} + c_2\ \mathrm{e}^{x}\,.$$
Poiché e^x è soluzione dell'equazione omogenea cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = A\,x\,\mathrm{e}^x$. Sostituendo nell'equazione troviamo $A = \dfrac{1}{2}$, perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x} + c_2\ \mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{x}\,.$$
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0\,. \end{cases}$$
Dunque la soluzione è
$$\frac{3}{4}\ \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{x}\ .$$

2. L'insieme E è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -4y = 0 \\ 2z = 0. \end{cases}$$
L'unico punto stazionario è $(0,0,0)$, che appartiene alla frontiera di E, è un punto di sella e dove la funzione vale zero. Sulla parte della frontiera $x^2+y^2 = 1$ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo i punti stazionari della funzione $L(x,y,z,\lambda) = x^2 - 2y^2 + z^2 - \lambda(x^2+y^2-1)$. Otteniamo il sistema
$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -4y - 2\lambda y = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ -2y(2+\lambda) = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

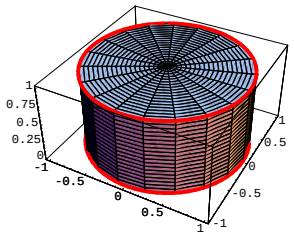


Figura 6: Il dominio E.

Dalla prima equazione si ottiene $x = 0$ oppure $\lambda = 1$.
Nel caso $x = 0$, dall'ultima equazione otteniamo i punti $(0, \pm 1, 0)$, mentre nel caso $\lambda = 1$ deve essere $y = 0$ e dunque otteniamo i punti $(\pm 1, 0, 0)$. Nei punti trovati si ha

$$f(0, \pm 1, 0) = -2\,, \qquad f(\pm 1, 0, 0) = 1\,.$$

Sulla parte della frontiera con $z = 1$ e $x^2 + y^2 \leq 1$ studiamo la funzione $g(x, y) = x^2 - 2y^2 + 1$. Il suo gradiente si annulla in $(0, 0)$ a cui corrisponde il punto $(0, 0, 1)$ dove $f = 1$. Sulla frontiera $x^2 + y^2 = 1$ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo i punti stazionari della funzione $L(x, y, \lambda) = x^2 - 2y^2 + 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -4y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = 0 \\ -2y(2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dunque otteniamo i punti $(0, \pm 1, 1)$ e $(\pm 1, 0, 1)$. Nei punti trovati si ha

$$f(0, \pm 1, 1) = -1\,, \qquad f(\pm 1, 0, 1) = 2\,.$$

La parte di frontiera con $z = 0$ è già stata studiata. In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo:

$$f(\pm 1, 0, 1) = 2 = \max_E f\,, \qquad f(0, \pm 1, 0) = -2 = \min_E f.$$

3. Utilizziamo le coordinate polari. L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (\cos^2\vartheta - 2\sin^2\vartheta)\varrho\, d\varrho d\vartheta &= \int_0^{2\pi} (3\cos^2\vartheta - 2) \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_1^2 d\vartheta \\ &= \frac{3}{2}(3\pi - 4\pi) = -\frac{3\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

4. Con la sostituzione $y = \dfrac{x+1}{2}$ otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{2(n+1)}\,.$$

Questa serie di potenze ha raggio di convergenza $\varrho = 1$, converge puntualmente per $y \in [-1, 1)$ e assolutamente per $y \in (-1, 1)$, con convergenza totale negli intervalli chiusi $[-r, r]$ con $0 < r < 1$.
La somma della serie è $1/2$ per $y = 0$. Per $y \neq 0$ e $|y| < 1$ abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{2(n+1)} &= \frac{1}{2y} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+1}}{(n+1)} = \frac{1}{2y} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^y t^n\,dt \\ &= \frac{1}{2y} \int_0^y \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right) dt = \frac{1}{2y} \int_0^y \left(\frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2y} \left[-\log(1-t) \right]_0^y = -\frac{\log(1-y)}{2y}\,.\end{aligned}$$

Tornando nella variabile x abbiamo convergenza puntuale in $[-3, 1)$, convergenza assoluta in $(-3, 1)$ e convergenza totale in $[a, b]$ per $-3 < a < b < 1$. La somma vale $1/2$ per $x = -1$ e altrove

$$\frac{\log 2 - \log(1-x)}{x+1}\,.$$

17 Compito di Analisi Matematica II del 29/06/10

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{y}\,(y')^2 - y' \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

dove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1\,,\ y-x \ge 0\,\}\,.$$

3. Calcolare, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

nell'insieme

$$E = \left\{(x,y) : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \le 1\right\}\ .$$

4. Calcolare, con i metodi dell'analisi complessa, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-2x+5}\,dx\,.$$

Soluzione del compito del 29/06/10

1. L'equazione differenziale è autonoma, dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$, da cui $y''(x) = z'(y(x))\, y'(x) = z'(y(x))\, z(y(x))$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.
$$\begin{cases} z\, z' - \dfrac{z^2}{y} + z = 0 \\ z(1) = 1, \end{cases}$$
dove y è la variabile indipendente. Poiché $z = 0$ non è soluzione, possiamo dividere per z, ottenendo il P.d.C.:
$$\begin{cases} z' - \dfrac{z}{y} + 1 = 0 \\ z(1) = 1, \end{cases}$$
Questa equazione è lineare del 1^o ordine. L'integrale generale dell'equazione omogenea è $z = k\, y$. Cerchiamo la soluzione particolare risolvendo $k'(y)\, y = -1$, cioè $k(y) = -\log y$. Dunque otteniamo $z(y) = k\, y - y \log y$, e imponendo la condizione iniziale risulta $k = 1$.

   Ora dobbiamo risolvere
$$\begin{cases} y' = y - y \log y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
   Separando le variabili troviamo:
$$\int \frac{1}{y(1 - \log y)}\, dy = \int dx,$$
   da cui
$$-\log(1 - \log y) = x + c\,,$$
   e dunque
$$1 - \log y = \mathrm{e}^{(-x-c)}\ .$$
   Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 0$, e la soluzione è
$$y(x) = \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{-x}}\ .$$

2. Utilizziamo le coordinate sferiche
$$\begin{cases} x = \varrho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \varrho \cos\varphi\,. \end{cases}$$

La condizione $y \geq x$ comporta $\pi/4 \leq \vartheta \leq 5\pi/4$, e l'integrale diventa

$$\int_0^{\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{\varrho^2 \sin^2 \varphi}\, \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \sin^2 \varphi \, d\varrho$$
$$= \pi \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

3. La funzione f è continua in E, l'insieme E è chiuso ma non è limitato, quindi non è garantita l'esistenza del massimo e del minimo della funzione.

   Cerchiamo i punti critici della funzione interni ad E. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\dfrac{1}{x^2} = 0 \\ f_y(x,y) = -\dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

   che evidentemente non ha soluzioni. Cerchiamo ora i punti stazionari sulla frontiera con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo:

$$L(x,y,\lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1\right)$$

   e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + 2\lambda\dfrac{1}{x^3} = 0 \\ -\dfrac{1}{y^2} + 2\lambda\dfrac{1}{y^3} = 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -x + 2\lambda = 0 \\ -y + 2\lambda = 0\,, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

   da cui $x = y$ e, per la terza equazione, $x = \pm\sqrt{2}$ e $y = \pm\sqrt{2}$. Risulta

$$f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,, \quad f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 0\,,$$
$$f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 0\,, \quad f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\,.$$

   Per motivi di simmetria dell'insieme e della funzione, evidentemente il massimo deve essere cercato nel primo quadrante, e il minimo nel terzo quadrante. Esaminiamo il primo quadrante. Se (x,y) è interno ad E allora, indicato con

(x, y') il punto sulla frontiera (vedi Figura 7) avente la stessa ascissa di (x, y), risulta

$$f(x, y) < f(x, y')$$

perciò basta dimostrare che esiste il massimo sulla frontiera nel primo quadrante. Sulla frontiera risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x\to1^+} \frac{1 + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1\,,$$

da cui segue che $\sqrt{2}$ è il massimo sulla frontiera e anche nell'insieme E. Analogamente si prova che $-\sqrt{2}$ è il minimo sulla frontiera e anche nell'insieme E.

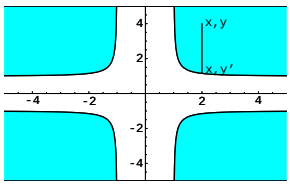


Figura 7: Il dominio E.

4. Per utilizzare i metodi dell'analisi complessa, consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{2iz}}{z^2 - 2z + 5}\,,$$

olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1 \pm 2i\}$. Per utilizzare il Lemma di Jordan, fissiamo $R > 3$ e consideriamo il circuito φ_R costituito dai due cammini $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R, R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := R\,\mathrm{e}^{it}\,, \quad t \in [0, \pi]\,; \quad \gamma_{2,R}(t) := t\,, \quad t \in [-R, R]\,.$$

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario e racchiude il polo del primo ordine $z = 1 + 2i$. Dal teorema dei residui segue

$$\oint_{\varphi_R} f(z)\,dz = 2\pi\, i \mathrm{Res}(f, 1 + 2i)$$

e si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f, 1+2i) &= \lim_{z\to 1+2i}(z-1-2i)f(z)\\ &= \lim_{z\to 1+2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{2iz}}{2z-2}\right) = \frac{\mathrm{e}^{2i-4}}{4i}\,.\end{aligned}$$

Allora, esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}\,,\ \gamma_{2,R}$

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{2it}}{t^2-2t+5}\,dt = 2\pi\,i\left(\frac{\mathrm{e}^{2i-4}}{4i}\right) = \frac{\mathrm{e}^{2i}}{2\,\mathrm{e}^4}\pi\,.$$

Poiché $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z^2-2z+5} = 0$, dal Lemma di Jordan segue anche $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$, e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x + i\sin 2x}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{\cos 2 + i\sin 2}{2\,\mathrm{e}^4}\,\pi\,,$$

da cui, uguagliando le parti reali,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{\cos 2}{2\,\mathrm{e}^4}\,\pi\,.$$

18 Compito di Analisi Matematica II del 29/06/10 (D.M. 509)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{y}\,(y')^2 - y' \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

dove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1\,,\ y-x \ge 0\}\,.$$

3. Calcolare, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

nell'insieme

$$E = \left\{(x,y) : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \le 1\right\}\ .$$

4. Determinare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica, definita in $[-\pi,\pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Soluzione del compito del 29/06/10 (D.M.509)

1. 2. 3. Vedi soluzione compito precedente.

4. La funzione f è regolare a tratti e 2π-periodica.. Si ha $\omega = 1$ dunque

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\, [x]_0^{\pi} = 1$$

e per $h > 0$

$$a_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(hx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(hx)}{h}\right]_0^{\pi} = 0\,.$$

Analogamente, per $h > 0$

$$b_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(hx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(hx)}{h}\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^h}{h\pi}\,.$$

Siccome la funzione f è discontinua nei punti $\pi + h\pi$ per $h \in \mathbb{Z}$, la sua serie di Fourier converge in tali punti al valore $1/2$ e converge uniformemente negli intervalli chiusi contenuti in $\mathbb{R} \setminus \{\pi + h\pi\,;\, h \in \mathbb{Z}\}$. Si ha

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^h}{h\pi}\, \sin(hx) = \frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{(2h+1)\pi}\, \sin((2h+1)\,x).$$

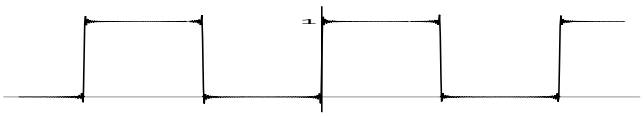


Figura 8: Una somma parziale della serie di Fourier.

19 Compito di Analisi Matematica II del 19/07/10 (D.M. 509)

1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3u' + \dfrac{x}{1+x^2}u = \dfrac{x}{u^2} \\ \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_E xy^2 \log(xy)\, dxdy,$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ 1 \le x \le 2,\ 2 \le xy \le 3\}$.

3. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$$

nell'insieme

$$E = \left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\right\}.$$

4. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x+n}{nx^2+1}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

5. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2}{(x+y)^2}\,,\ \frac{x^2}{(x+y)^2}\right),$$

dire se è conservativo, e in caso affermativo determinarne i potenziali.

Soluzione del compito del 19/07/10 (D.M.509)

1. L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = -2$. Utilizziamo la sostituzione $z = u^3$, da cui $z' = 3u^2\,u'$. Allora, moltiplicando l'equazione per u^2, dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} z' + \dfrac{x}{1+x^2} z = x \\ z(0) = -1. \end{cases}$$

Questa è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Abbiamo

$$A(x) = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\log(1+x^2)$$

e quindi l'integrale generale è

$$\begin{aligned} z(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\log(1+x^2)} \left(c + \int x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,\log(1+x^2)}\,dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(c + \int x\,\sqrt{1+x^2}\,dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(c + \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} \right) \\ &= \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}\,(1+x^2)\,. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale troviamo $c = -4/3$ e dunque, ricordandoci della sostituzione iniziale troviamo

$$u(x) = \sqrt[3]{-\frac{4}{3\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}\,(1+x^2)}\,.$$

2. Usando la formula di riduzione sugli insiemi normali, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_E xy^2 \log(xy)\,dxdy &= \int_1^2 x\,dx \int_{2/x}^{3/x} y^2 \log(xy)\,dy \\ &= \int_1^2 x\,dx \left(\left[\frac{y^3}{3} \log(xy) \right]_{2/x}^{3/x} - \int_{2/x}^{3/x} \frac{y^2}{3}\,dy \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^2 x \left(\frac{9}{x^3} \log 3 - \frac{8}{3x^3} \log 2 - \left[\frac{y^3}{9} \right]_{2/x}^{3/x} \right) dx \\
&= \int_1^2 x \left(\frac{9}{x^3} \log 3 - \frac{8}{3x^3} \log 2 - \frac{3}{x^3} + \frac{8}{9x^3} \right) dx \\
&= \left[-\frac{9}{x} \log 3 + \frac{8}{3x} \log 2 + \frac{3}{x} - \frac{8}{9x} \right]_1^2 \\
&= -\frac{9}{2} \log 3 + \frac{8}{6} \log 2 + \frac{3}{2} - \frac{8}{18} + 9 \log 3 - \frac{8}{3} \log 2 - 3 + \frac{8}{9} \\
&= \frac{1}{18} \left(81 \log 3 - 24 \log 2 - 19 \right) .
\end{aligned}
$$

3. L'insieme E è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$
\begin{cases}
2x = 0 \\
-2y = 0 \\
2z = 0.
\end{cases}
$$

L'unico punto stazionario è $(0, 0, 0)$, che appartiene alla frontiera di E, è un punto di sella e la funzione vale zero.

Sulla parte della frontiera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo i punti stazionari della funzione $L(x, y, z, \lambda) = x^2 - y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Otteniamo il sistema

$$
\begin{cases}
2x - 2\lambda x = 0 \\
-2y - 2\lambda y = 0 \\
2z - 2\lambda z = 0 \\
x^2 + y^2 + z^2 = 1
\end{cases}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{cases}
2x(1 - \lambda) = 0 \\
-2y(1 + \lambda) = 0 \\
2z(1 - \lambda) = 0 \\
x^2 + y^2 + z^2 = 1 .
\end{cases}
$$

Dalla prima equazione si ottiene $x = 0$ oppure $\lambda = 1$.
Nel caso $x = 0$, possiamo scegliere $y = 0$ ed allora deve essere $z = 1$, oppure $\lambda = -1$ ed allora si ha $z = 0$ e $y = \pm 1$. In questi punti risulta dall'ultima equazione otteniamo i punti $(0, \pm 1, 0)$, mentre nel caso $\lambda = 1$ deve essere $y = 0$ e dunque otteniamo i punti $(\pm 1, 0, 0)$. Nei punti trovati si ha

$$
f(0, 0, 1) = 1 , \qquad f(0, \pm 1, 0) = -1 .
$$

Nel caso $\lambda = 1$, deve essere $y = 0$ ed otteniamo tutti i punti della semicirconferenza $\{ x^2 + z^2 = 1 , z \geq 0 \}$ dove f vale 1. Sulla parte della frontiera con

$z = 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$ studiamo la funzione $g(x, y) = x^2 - y^2$. Il suo gradiente si annulla in $(0, 0)$ a cui corrisponde il punto $(0, 0, 0)$ dove $f = 0$. Sulla frontiera $x^2 + y^2 = 1$ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo i punti stazionari della funzione $L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = 0 \\ -2y(1 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \,. \end{cases}$$

Dunque otteniamo i punti $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$. Nei punti trovati si ha

$$f\,(0, \pm 1, 0) = -1\,, \qquad f\,(\pm 1, 0, 0) = 1\,.$$

In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo:

$$\max_E f = 1\,, \qquad \min_E f = -1.$$

4. Per $x = 0$ risulta $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = +\infty$, mentre per $x \neq 0$ risulta $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Poiché la funzione $\frac{1}{x^2}$ è illimitata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ la successione f_n non converge uniformemente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Consideriamo allora l'insieme $X_a = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ con $a > 0$. Risulta, per $x \in X_a$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x + n}{nx^2 + 1} - \frac{1}{x^2} \right| &= \left| \frac{x^3 - 1}{x^2(nx^2 + 1)} \right| \\ &\leq \left| \frac{x}{(nx^2 + 1)} \right| + \left| \frac{1}{x^2(nx^2 + 1)} \right| \\ &\leq \left| \frac{x}{(nx^2 + 1)} \right| + \left| \frac{1}{a^2(na^2 + 1)} \right| . \end{aligned}$$

Il secondo addendo non dipende da x, dunque tende a zero uniformemente. Riguardo al primo addendo, esso tende a zero per $x \to \pm\infty$ mentre

$$D\left(\frac{x}{(nx^2 + 1)} \right) = \frac{1 - nx^2}{(nx^2 + 1)^2}$$

che si annulla per $x = \pm 1/\sqrt{n}$, dove il primo addendo vale $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Quindi

$$\sup_{x \in X_a} \left| \frac{x}{(nx^2 + 1)} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

così entrambi gli addendi tendono a zero uniformemente in X_a e dunque f_n converge uniformemente a $1/x^2$ in X_a.

5. Il campo è definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x+y=0\}$. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{(x+y)^2}\right) = \frac{2xy}{(x+y)^3}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{(x+y)^2}\right) = \frac{2xy}{(x+y)^3}\,.$$

Dunque il campo è irrotazionale nei due insiemi convessi $A_1\,,\ A_2$ dove esso è definito, pertanto è conservativo.
Per trovare il potenziale abbiamo

$$\int \frac{y^2}{(x+y)^2}\,dx = -\frac{y^2}{(x+y)} + c(y)\,.$$

Derivando rispetto a y e uguagliando alla seconda componente del campo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y^2}{(x+y)} + c(y)\right) = \frac{y^2}{(x+y)^2} - \frac{2\,y}{x+y} + c'(y) = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

da cui segue

$$c'(y) = \frac{x^2}{(x+y)^2} - \frac{y^2}{(x+y)^2} + \frac{2\,y}{x+y} = 1\,,$$

dunque $c(y) = y$ e il potenziale è:

$$\frac{xy}{(x+y)} + c_1\varphi_{A_1} + c_2\varphi_{A_2}\,.$$

20 Compito di Analisi Matematica II del 13/09/10 (D.M. 509)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E \mathrm{e}^z \; dxdydz,$$

dove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \le 1\,,\; x^2+y^2 \le 3z^2\,,\; z \ge 0\}\,.$$

3. Trovare i punti dell'insieme

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^4+y^4+6xy-8 = 0\}$$

che sono piú vicini all'origine, e quelli che ne sono piú lontani.

4. Determinare la serie di Fourier di soli seni della funzione 2-periodica, definita in $[0,2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [0,1)\,, \\ 0 & \text{per } x \in [1,2)\,. \end{cases}$$

Soluzione del compito del 13/09/10 (D.M.509)

1. L'equazione è a variabili separabili. Dunque dobbiamo risolvere

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

da cui segue

$$\arcsin y = (\arcsin x) + c \Longrightarrow y = \sin\left((\arcsin x) + c\right)\,.$$

Imponendo la condizione iniziale troviamo $c = \pi/6$ e dunque, utilizzando la formula di addizione per la funzione seno, la soluzione è:

$$y = \sin\left((\arcsin x) + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\,x}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\,.$$

2. Per usare le coordinate cilindriche, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \varrho^2 + z^2 = 1 \\ \varrho^2 = 3z^2\,,\ z \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 4z^2 = 1\,, \Longrightarrow z = \frac{1}{2}\,, \varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Dunque si ha:

$$\begin{aligned} \iiint_E \mathrm{e}^z\ dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{3}/2} \varrho\, d\varrho \int_{\varrho/\sqrt{3}}^{\sqrt{1-\varrho^2}} \mathrm{e}^z\ dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[\mathrm{e}^z\ \right]_{\varrho/\sqrt{3}}^{\sqrt{1-\varrho^2}} \varrho\, d\varrho \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{1-\varrho^2}} - \mathrm{e}^{\varrho/\sqrt{3}}\right) \varrho\, d\varrho \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\sqrt{3}/2} \mathrm{e}^{\sqrt{1-\varrho^2}}\, \varrho\, d\varrho - \int_0^{\sqrt{3}/2} \mathrm{e}^{\varrho/\sqrt{3}}\, \varrho\, d\varrho\right)\,. \end{aligned}$$

Cambiando la variabile nel primo integrale ($1-\varrho^2 = t^2$) e integrando per parti nel secondo, si ha:

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left(\int_{1/2}^{1} \mathrm{e}^t\, t\, dt - \left[\sqrt{3}\ \mathrm{e}^{\varrho/\sqrt{3}}\ \varrho\right]_0^{\sqrt{3}/2} + \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{3}\ \mathrm{e}^{\varrho/\sqrt{3}}\ d\varrho\right) \\ &= 2\pi \left(\left[\mathrm{e}^t\, t\right]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \mathrm{e}^t\ dt - \frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}} + \left[3\,\mathrm{e}^{\varrho/\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt{3}/2}\right) \\ &= 2\pi \left(\mathrm{e} - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}} + 3\sqrt{\mathrm{e}} - 3\right) = 2\pi(2\sqrt{\mathrm{e}} - 3)\,. \end{aligned}$$

3. E' opportuno studiare la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ che ha gli stessi punti di estremo della funzione distanza. L'insieme K è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f su K.

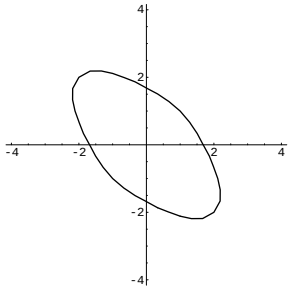


Figura 9: L'insieme K.

Troviamo i punti stazionari vincolati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Consideriamo la funzione $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^4 + y^4 + 6xy - 8)$. I punti stazionari di L si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - \lambda(4x^3 + 6y) = 0 \\ 2y - \lambda(4y^3 + 6x) = 0 \\ x^4 + y^4 + 6xy - 8 = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per y, la seconda per x e sottraendo si ottiene (tenuto conto che non può essere $\lambda = 0$):

$$(y^2 - x^2)(2xy - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2xy = 3, \text{ oppure } x = \pm y\,.$$

Sostituendo nella terza equazione, nel primo caso non ci sono soluzioni, nel secondo caso otteniamo i punti:

$$(2,-2), \quad (-2,2), \quad (1,1), \quad (-1,-1)$$

dove la funzione vale

$$f(2,-2) = f(-2,2) = 8, \quad f(1,1) = f(-1,-1) = 2\,.$$

Dunque il minimo della distanza dei punti di K dall'origine è $\sqrt{2}$ mentre il massimo è $2\sqrt{2}$.

4. Per sviluppare la funzione f mediante una serie di soli seni occorre raddoppiare il periodo e considerare il prolungamento dispari f_d della funzione f. Dunque si ha

$$T = 4, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad b_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_d(x)\sin(k\omega x)\,dx,$$

da cui

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_d(x)\sin(k\omega x)\,dx = \int_0^2 f(x)\sin(k\omega x)\,dx \\ &= \int_0^1 \sin(k\omega x)\,dx = \left[\frac{-\cos(k\omega x)}{k\omega}\right]_0^1 = \frac{1-\cos(k\pi/2)}{k\omega}\,. \end{aligned}$$

In definitiva:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi k}\left(1-\cos(k\pi/2)\right)\,\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,.$$

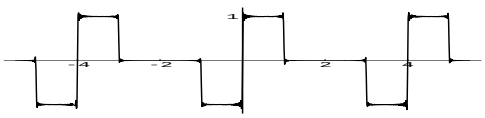


Figura 10: Una somma parziale della serie di Fourier.

21 Compito di Analisi Matematica II del 15/12/10 (D.M. 270)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = \sin x \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\ x\ dxdy\,,$$

dove $E = \left\{(x,y);\ x^2+y^2-2y \le 0\ ,\ x^2+y^2-2\sqrt{3}\ x \le 0\ \right\}$.

3. Calcolare i massimi ed i minimi assoluti e relativi della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+y^2-x^3}$$

nell'insieme $A = \{(x,y); x^2+4y^2 \le 4\ \}$.

4. Calcolare la trasformata inversa di Laplace della funzione

$$f(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+5}.$$

Soluzione del compito del 15/12/10 (D.M. 270)

1. L'equazione differenziale è del secondo ordine, lineare, non omogenea. La sua equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0\,.$$

Otteniamo $\lambda = -2 \pm 3i$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-2x}\ \cos 3x + c_2\ \mathrm{e}^{-2x}\ \sin 3x.$$

Poiché il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\overline{y}(x) = A\ \cos x + B\ \sin x$. Risulta

$$\overline{y}'(x) = -A\ \sin x + B\ \cos x\,, \qquad \overline{y}''(x) = -A\ \cos x - B\ \sin x\,.$$

Sostituendo nell'equazione, otteniamo

$$-A\ \cos x - B\ \sin x + 4(-A\ \sin x + B\ \cos x) + 13(A\ \cos x + B\ \sin x) = \sin x\,,$$

da cui

$$(12A + 4B)\cos x + (12B - 4A)\sin x = \sin x\,.$$

Allora otteniamo

$$\begin{cases} 12A + 4B = 0 \\ 12B - 4A = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\frac{1}{40}\,,\ B = \frac{3}{40}\,,$$

perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-2x}\ \cos 3x + c_2\ \mathrm{e}^{-2x}\ \sin 3x - \frac{1}{40}\ \cos x + \frac{3}{40}\ \sin x.$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{40} = 0 \\ -2c_1 + 3c_2 + \frac{1}{40} = 0\,. \end{cases}$$

Dunque la soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{40}\ \mathrm{e}^{-2x}\ \cos 3x - \frac{1}{120}\ \mathrm{e}^{-2x}\ \sin 3x - \frac{1}{40}\ \cos x + \frac{3}{40}\ \sin x.$$

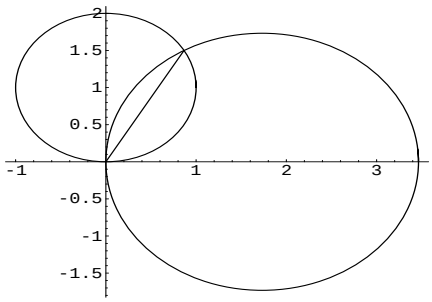


Figura 11: Il dominio d'integrazione.

2. Utilizziamo le coordinate polari. Dalle prime due disuguaglianze otteniamo:

$$\varrho^2 - 2\varrho \sin\vartheta \le 0\,, \qquad \varrho^2 - 2\sqrt{3}\,\varrho\cos\vartheta \le 0\,.$$

Considerando l'intersezione delle due circonferenze, si ha:

$$\begin{cases} \varrho(\varrho - 2\sin\vartheta) = 0 \\ \varrho(\varrho - 2\sqrt{3}\,\cos\vartheta) = 0 \end{cases} \implies \sin\vartheta = \sqrt{3}\,\cos\vartheta \implies \tan\vartheta = \sqrt{3} \implies \vartheta = \frac{\pi}{3}\,.$$

Allora l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\sin\vartheta} \varrho^3\cos\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2\sqrt{3}\,\cos\vartheta} \varrho^3\cos\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/3}\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{2\sin\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{3}\,\cos\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/3} 4\sin^4\vartheta\,\cos\vartheta\,d\vartheta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 36\cos^5\vartheta\,d\vartheta \\
&= \frac{4}{5}\left[\sin^5\vartheta\right]_0^{\pi/3} + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 36(1-\sin^2\vartheta)^2\cos\vartheta\,d\vartheta \qquad (\text{posto } t = \sin\vartheta) \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \int_{\sqrt{3}/2}^1 36(1-t^2)^2\,dt = \frac{36\sqrt{3}}{160} + 36\left[t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_{\sqrt{3}/2}^1 \\
&= \frac{9\sqrt{3}}{40} + 36\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{32}\right) \\
&= \frac{9\sqrt{3}}{40} + 36\left(\frac{8}{15} - \frac{49\sqrt{3}}{160}\right) = \frac{96}{5} - \frac{54\sqrt{3}}{5}
\end{aligned}$$

3. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione f è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f. Poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente, basta cercare i punti di massimo e di minimo di $h(x) = x^2+y^2-x^3$. Cerchiamo i punti dove il gradiente si annulla.

$$\begin{cases} 2x - 3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad \text{i due punti critici sono} \quad (0,0) \quad (2/3,0)$$

Consideriamo il vincolo $x^2 + 4y^2 = 4$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La funzione di Lagrange è

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - x^3 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)\,.$$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4\,, \end{cases} \implies \begin{cases} x(2 - 3x - 2\lambda) = 0 \\ 2y(1 - 4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} .$$

Dunque abbiamo $y = 0$ e allora $x = \pm 2$, oppure $x = 0$ e allora $y = \pm 1$. Infine per $\lambda = 1/4$ si ha $x = 1/2$ e $y = \pm\sqrt{15}/4$. Confrontando i valori della funzione f in questi punti si ottiene:

$$\max_A f = f(-2,0) = \mathrm{e}^{12}\,, \qquad \min_A f = f(2,0) = \mathrm{e}^{-4}\,,$$

4. Il denominatore di f si annulla in $s = -2 \pm i$, quindi per calcolare l'antitrasformata di Laplace possiamo utilizzare la formula di Heaviside. Si ha:

$$\begin{aligned} F(t) &= \left(\frac{-1+i}{2(-2+i)+4}\ \mathrm{e}^{(-2+i)t} + \frac{-1-i}{2(-2-i)+4}\ \mathrm{e}^{(-2-i)t} \right) H(t) \\ &= \left(\frac{-1+i}{2i}\ \mathrm{e}^{it} + \frac{1+i}{2i}\ \mathrm{e}^{-it} \right) \mathrm{e}^{-2t}\ H(t) = \left(\frac{1+i}{2}\ \mathrm{e}^{it} + \frac{1-i}{2}\ \mathrm{e}^{-it} \right) \mathrm{e}^{-2t}\ H(t) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} \left(\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it} + i(\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}) \right) H(t) = (\cos t - \sin t)\ \mathrm{e}^{-2t}\ H(t)\,. \end{aligned}$$

22 Compito di Analisi Matematica II del 15/12/10 (D.M. 509)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = \sin x \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\ x\ dxdy\,,$$

dove $E = \left\{(x,y);\ x^2+y^2-2y \le 0\ ,\ x^2+y^2-2\sqrt{3}\ x \le 0\ \right\}$.

3. Calcolare i massimi ed i minimi assoluti e relativi della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+y^2-x^3}$$

nell'insieme $A = \{(x,y); x^2+4y^2 \le 4\ \}$.

4. Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, -\frac{x^2-x+y^2}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ e in $\Omega = \{(x,y); y > 0\}$, è conservativo.
In caso affermativo trovarne un potenziale.

Soluzione del compito del 15/12/10 (D.M. 509)

1. 2. 3. Vedi compito precedente.

4. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right)=\frac{(x-1)^2-y^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}\right)=\frac{(x-1)^2-y^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}\,.$$

Dunque il campo è irrotazionale. Il dominio $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ non è semplicemente connesso, dunque proviamo a calcolare l'integrale del campo lungo una circonferenza centrata in $\{(1,0)\}$. Consideriamo $\varphi(t)=(1+\cos t,\sin t)$ con $t\in[0,2\pi]$. Otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_\varphi F\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi}\big(-\sin^2 t-[(1+\cos t)^2-1-\cos t+\sin^2 t]\cos t\big)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\big(-\sin^2 t-\cos^2 t-\cos t\big)\,dt=-2\pi\,,\end{aligned}$$

dunque il campo non è conservativo.
L'insieme Ω è convesso, perciò in esso il campo è conservativo. Troviamo il potenziale. Per trovare il potenziale abbiamo

$$\int\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,dx=\frac{1}{y}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-1}{y}\right)^2+1}=\arctan\left(\frac{x-1}{y}\right)+c(y)\,.$$

Derivando rispetto a y e uguagliando alla seconda componente del campo si ha:

$$\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}+c'(y)=-\frac{x^2-x+y^2}{(x-1)^2+y^2}\,,$$

da cui otteniamo:

$$c'(y)=-\frac{x^2-x+y^2}{(x-1)^2+y^2}-\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}=-\frac{x^2-2x+1+y^2}{(x-1)^2+y^2}=-1\,.$$

Dunque $c(y)=-y$ da cui segue che i potenziali sono:

$$\arctan\left(\frac{x-1}{y}\right)-y+c\,.$$

Parte III
A.A. 2011/12 – Corso D.M.270

Soluzione dei compiti di Analisi Matematica II

I compiti con 5 domande sono stati assegnati per Ingegneria dell'Informazione

I compiti con 4 domande sono stati assegnati per Ingegneria Industriale

23 Compito di Analisi Matematica II del 13/02/12

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{t} + ty^3 = 0 \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare la misura della parte di piano data da

$$E = \left\{(x,y);\ x^2+y^2-2x \geq 0\ ,\ x^2+y^2-4x \leq 0\ , y \leq x\ ,\ y \geq 0\right\}\ .$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 - yz$$

nell'insieme $A = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq x+y\ \}$.

4. Determinare, se esiste, il potenziale del campo

$$\left(\frac{2x}{z}\,,\frac{2y}{z}\,,-\frac{x^2+y^2}{z^2}\right).$$

5. Risolvere mediante la trasformata di Laplace il P.d.C.

$$\begin{cases} Y''(t) + 4Y(t) = F(t) & t > 0, \\ Y(0) = 0,\ Y'(0) = 0\ , \end{cases}$$

dove

$$F(t) = \varphi_{[1,4]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } \ 1 \leq t \leq 4, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione del compito del 13/02/12

1. L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = 3$. Possiamo risolverla con la sostituzione $w = y^{1-3} = y^{-2}$ e dunque $w' = -2y^{-3}y'$. Dividendo l'equazione per y^3 e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\,w' + \dfrac{w}{t} + t = 0 \\ w(1) = 1\,. \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} w' - 2\dfrac{w}{t} = 2t \\ w(1) = 1\,. \end{cases}$$

   Utilizziamo la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine. Risulta

$$A(t) = -2\int \frac{dt}{t} = -2\log t = -\log t^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-A(t)} = t^2,$$

   e quindi

$$w(t) = t^2\left(c + \int \frac{2}{t}\,dt\right) = ct^2 + 2t^2\log t\,.$$

   Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 1$ e dunque $w = t^2 + t^2\log t^2$. In definitiva

$$y(x) = w(x)^{-1/2} = \frac{1}{t\,\sqrt{1+\log t^2}}\,.$$

2. Utilizziamo le coordinate polari. Dalle prime due disuguaglianze otteniamo:

$$\varrho^2 - 2\varrho\cos\vartheta \geq 0\,, \qquad \varrho^2 - 4\varrho\cos\vartheta \leq 0\,, \quad \Longrightarrow \quad 2\cos\vartheta \leq \varrho \leq 4\cos\vartheta\,.$$

   Dalle altre due disuguaglianze segue $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$. In definitiva

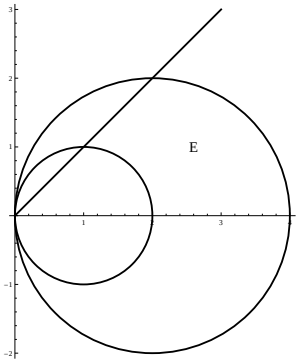
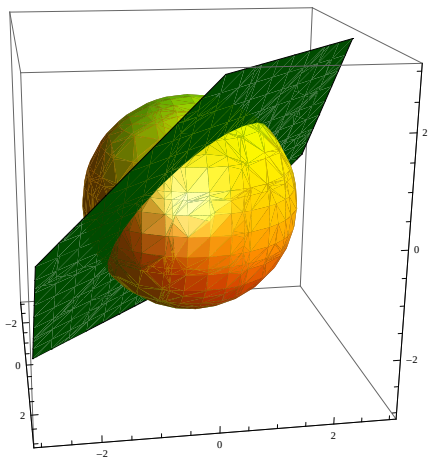


Figura 12: L'insieme E.

$$m_2(E) = \iint_E 1\,dxdy = \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_{2\cos\vartheta}^{4\cos\vartheta} \varrho\, d\varrho = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_{2\cos\vartheta}^{4\cos\vartheta} d\vartheta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 12\cos^2\vartheta\, d\vartheta = 6\left[\frac{\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}\,.$$

3. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione f è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f.



Cerchiamo i punti dove il gradiente si annulla.

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -z = 0 \\ -y = 0\,, \end{cases} \qquad \text{l'unico punto critico è } (0,0,0) \quad \text{e} \quad f(0,0,0) = 0$$

Consideriamo il vincolo $x^2+y^2+z^2 = 4$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La funzione di Lagrange è

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 - yz - \lambda(x^2+y^2+z^2-4)\,.$$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -z - 2\lambda y = 0 \\ -y - 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ z + 2\lambda y = 0 \\ y + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} .$$

Dunque dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ oppure $\lambda = 1$. Inoltre ricavando z dalla seconda equazione e sostituendo nella terza, abbiamo $z - 4\lambda^2 z = 0$, cioè $z(1 - 4\lambda^2) = 0$ e dunque $z = 0$ oppure $\lambda = \pm 1/2$. Nel caso $z = 0$ si ha anche $y = 0$ mentre per $\lambda = \pm 1/2$ si ha $y = \pm z$. In definitiva per $x = 0$ deve essere $y = \pm z$ e dalla quarta equazione otteniamo $y = \pm\sqrt{2}$. Allora

$$f(0, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = -2\,, \qquad f(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\,, \qquad (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) \notin A\,.$$

Per $\lambda = 1$, deve essere $y = z = 0$ e quindi dalla quarta equazione:

$$x = \pm 2\,, \quad f(-2, 0, 0) = 4\,, \quad (2, 0, 0) \notin A\,.$$

Il vincolo $z = x + y$ è in forma cartesiana, pertanto cerchiamo i punti critici della funzione

$$g(x, y) = x^2 - y(x + y) = x^2 - y^2 - xy\,.$$

Otteniamo

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y + x = 0\,, \end{cases} \qquad \text{l'unico punto critico è } (0, 0) \text{ a cui corrisponde } \; f(0, 0, 0) = 0$$

Infine, per studiare i punti di intersezione tra il piano e la sfera, cerchiamo i punti critici di $g(x, y)$ sul vincolo $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) + 2xy = 4$, cioè $x^2 + y^2 + xy - 2 = 0$. La funzione di Lagrange è

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - xy - \lambda(x^2 + y^2 + xy - 2)\,.$$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x - y - \lambda y = 0 \\ -2y - x - 2\lambda y - \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 2\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2(1 - \lambda)x - (1 + \lambda)y = 0 \\ (1 + \lambda)x + 2(1 + \lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 2(1 - \lambda)x - (1 + \lambda)y = 0 \\ (1 + \lambda)(x + 2y) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 2 \end{cases} .$$

Per $\lambda = -1$ otteniamo $x = 0$ e dalla terza equazione $y = \pm\sqrt{2}$, per cui ritroviamo $g(0, \pm\sqrt{2}) = -2$. Per $x = -2y$ dalla terza equazione otteniamo $3y^2 = 2$, e quindi

$$g\left(\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \mp\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{10}{3}\,.$$

Confrontando i valori della funzione f nei punti ottenuti concludiamo:

$$\max_A f = f(-2,0,0) = 4\,, \qquad \min_A f = f(0,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}) = -2\,,$$

4. Il campo è definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\, z = 0 \,\}$, che è unione di due aperti convessi A_1 e A_2. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{z}\right) = 0\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{z}\right) = -\frac{2x}{z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2y}{z}\right) = -\frac{2y}{z^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)\,.$$

Dunque il campo è irrotazionale nei due insiemi convessi $A_1\,,\ A_2$ dove esso è definito, pertanto è conservativo.
Per trovare il potenziale abbiamo

$$-\int \frac{x^2+y^2}{z^2}\,dz = \frac{x^2+y^2}{z} + c(x,y)\,.$$

Derivando rispetto a y e uguagliando alla seconda componente del campo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2+y^2}{z} + c(x,y)\right) = \frac{2y}{z} + c_y(x,y) = \frac{2y}{z}$$

da cui segue $c_y = 0$ e quindi $c = c(x)$. Derivando rispetto a x e uguagliando alla prima componente del campo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{z} + c(x)\right) = \frac{2x}{z} + c'(x) = \frac{2x}{z}$$

da cui segue $c' = 0$ e quindi c è costante e il potenziale è:

$$\frac{x^2+y^2}{z} + c_1\varphi_{A_1} + c_2\varphi_{A_2}\,.$$

5. La funzione $F(t)$, utilizzando la funzione di Heaviside, si può scrivere come $F(t) = H(t-1) - H(t-4)$. Allora la sua trasformata di Laplace è

$$f(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-4s}}{s}\,.$$

Tenendo conto dei dati iniziali, la trasformata di Laplace dell'equazione fornisce:

$$s^2 y(s) + 4y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-4s}}{s} \quad \Longrightarrow \quad y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-4s}}{s(s^2+4)}\,.$$

Determiniamo la decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{As^2 + 4A + Bs^2 + Cs}{s(s^2+4)}\,,$$

da cui $A = 1/4$, $B = -1/4$ e $C = 0$. Pertanto dobbiamo antitrasformare la funzione

$$\frac{\mathrm{e}^{-s}}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{\mathrm{e}^{-4s}}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)\,.$$

Otteniamo

$$Y(t) = \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2(t-1))\right) H(t-1) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2(t-4))\right) H(t-4)\,.$$

24 Compito di Analisi Matematica II del 13/02/12

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-t} \sin t \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Calcolare la misura della parte di piano data da

$$E = \left\{(x, y);\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0\ ,\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0\ , y \leq x\ ,\ y \geq 0\right\}\ .$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 - yz$$

nell'insieme $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq x + y\ \}$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2–periodica definita nell'intervallo $[-1, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{per} \qquad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dire se f è sviluppabile in serie di Fourier e determinarne la serie. Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1}\,.$$

Soluzione del compito del 13/02/12

1. L'equazione è lineare non omogenea con termine noto di tipo particolare. Studiamo prima l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2+2\lambda+2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = -1 \pm i$, allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è:
$$y(c) = c_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos t + c_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin t.$$
Poiché il termine noto $\mathrm{e}^{-t}\sin t$ è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo
$$\overline{y}(x) = t\,\mathrm{e}^{-t}(A\cos t + B\sin t).$$
Calcoliamo le derivate prima e seconda di $\overline{y}$ (basta calcolare la derivata prima e i termini della derivata seconda che non sono moltiplicati per t). Sostituendo nell'equazione (basta inserire i termini che non sono moltiplicati per t perché gli altri si semplificano) troviamo:
$$B = 0\,, \qquad A = -\frac{1}{2}\,.$$
Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è:
$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos t + c_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin t - \frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-t}\cos t.$$
Imponendo le condizioni iniziali troviamo $c_1 = 0$ e:
$$y'(x) = -c_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin t + c_2\,\mathrm{e}^{-t}\cos t - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\cos t + \frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-t}\cos t + \frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-t}\sin t\,,$$
da cui $c_2 = 1/2$, e dunque la soluzione è
$$y(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\left(\sin t - t\cos t\right).$$

2. Vedi compito precedente.

3. Vedi compito precedente.

4. La funzione f è continua a tratti, regolare a tratti e dispari. Dunque è sviluppabile in serie di Fourier di soli seni. Poiché $T = 2$ abbiamo $\omega = \pi$, pertanto
$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx \\ &= 2\left[-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 = 2\left(-\frac{\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right) = 2\,\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\,. \end{aligned}$$

I coefficienti b_k valgono 0 per k pari, mentre per k dispari valgono $b_k = 4/(k\pi)$. Allora posto $k = 2h + 1$ risulta

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2h+1)} \sin((2h+1)\pi x)\,.$$

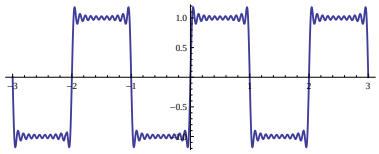


Figura 13: Una somma parziale della serie di Fourier.

Per calcolare la somma della serie numerica proposta, consideriamo il punto $x = 1/2$. Allora

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{2h+1} \sin(h\pi + \pi/2) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1}\,,$$

e in definitiva

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

25 Compito di Analisi Matematica II del 27/02/12

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy'' = (y')^2 + y^2 \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E x^2\, dxdydz\,,$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 4\ ,\ x^2+y^2 \le 1\ \right\}.$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = z$$

nell'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \le z^2+1,\ -2 \le x+y-2z \le 3\ \right\}.$$

4. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma z\, d\sigma\,,$$

dove Σ è il grafico della funzione $z = x^2+y^2$ definita sul dominio

$$D = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2 \le 1\ \right\}.$$

5. Utilizzando i metodi dell'analisi complessa, calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2-4x+5}\,.$$

Soluzione del compito del 27/02/12

1. L'equazione differenziale è autonoma dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ da cui $z'(y)y' = z'(y)z(y) = y''$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} 2yzz' = z^2 + y^2 \\ z(1) = 1, \end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Dividendo per yz otteniamo

$$2z' = \frac{z}{y} + \frac{y}{z}.$$

Questa equazione è di Bernoulli con $\alpha = -1$: Utilizziamo la sostituzione $w = z^2$, da cui $w' = 2z\,z'$. Allora, moltiplicando per z, dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} w' = \dfrac{w}{y} + y \\ w(1) = 1. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} w' - \dfrac{w}{y} = y \\ w(1) = 1. \end{cases}$$

Utilizziamo la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine. Risulta

$$A(t) = -\int \frac{dy}{y} = -\log|y| = -\log y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-A(y)} = y,$$

e allora

$$w(y) = y\left(c + \int \frac{1}{y}\, y\, dy\right) = cy + y^2\,.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 0$ e quindi $w(y) = y^2$. Dunque

$$z(y) = w(y)^{1/2} = y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad .$$

e la soluzione è $y(x) = \mathrm{e}^x$.

2. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali, imponendo $\varrho^2 + z^2 \le 4$ e $\varrho^2 \le 1$, abbiamo

$$0 \le \varrho \le 1, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \qquad -\sqrt{4-\varrho^2} \le z \le \sqrt{4-\varrho^2}.$$

Allora l'integrale vale

$$\iiint_E x^2\,dxdydz = \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\,d\vartheta \int_0^1 \varrho^3\,d\varrho \int_{-\sqrt{4-\varrho^2}}^{\sqrt{4-\varrho^2}} dz$$

$$= \pi \int_0^1 2\Big[z\Big]_0^{\sqrt{4-\varrho^2}} \varrho^3\,d\varrho = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4-\varrho^2}\varrho^3\,d\varrho$$

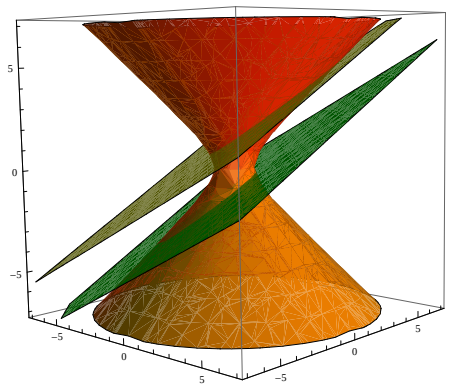
usiamo la sostituzione $\varrho = 2\sin t \implies d\varrho = 2\cos t\,dt$

$$= 64\pi \int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin^2 t}\sin^3 t\cos t\,dt = 64\pi \int_0^{\pi/6} \sin^3 t\,\cos^2 t\,dt$$

$$= 64\pi \int_0^{\pi/6} \sin t(\cos^2 t - \cos^4 t)\,dt = 64\pi \left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/6}$$

$$= 64\pi \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{160} + \frac{2}{15}\right) = \pi\left(\frac{128}{15} - \frac{22\sqrt{3}}{5}\right).$$

3. Il dominio E è chiuso, verifichiamo che è anche limitato.



Per questo ricordiamo che vale $|2xy| \le x^2+y^2$ e che non si può immediatamente elevare al quadrato ambo i membri di una disequazione in cui compaiono variabili. Per questo distinguiamo due casi. Considerando $z > 0$ otteniamo

$$x^2+y^2 \le z^2+1,\ 2z \le x+y+2 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 \le \frac{(x+y+2)^2}{4}+1, \quad (1)$$

mentre per $z < 0$, e quindi $-z > 0$, otteniamo

$$x^2+y^2 \le z^2+1,\ -2z \le 3-x-y \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 \le \frac{(3-x-y)^2}{4}+1. \quad (2)$$

Allora dalla disequazione (1) segue

$$x^2+y^2 \leq \frac{x^2+y^2+2xy+4x+4y+4}{4}+1 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 \leq 2x+2y+4$$

$$\Longrightarrow \quad (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 6,$$

dunque x, y e di conseguenza z sono limitate. Analogamente dalla disequazione (2) segue

$$x^2+y^2 \leq \frac{x^2+y^2+2xy-6x-6y+9}{4}+1 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 \leq -3(x+y)+\frac{13}{8}$$

$$\Longrightarrow \quad (x+3/4)^2+(y+3/4)^2 \leq \frac{11}{4},$$

dunque x, y e di conseguenza z sono limitate. Concludendo l'insieme è compatto, la funzione f è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f. Il gradiente della funzione f è costante, $\nabla f(x,y,z) = (0,0,1)$, pertanto essa non ha punti stazionari. Geometricamente è evidente che non ci possono essere punti stazionari vincolati sull'iperboloide e sui due piani, ma facciamo la verifica. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo la funzione $L(x,y,z,\lambda) = z - \lambda(x^2+y^2-z^2-1)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -2\lambda x = 0 \\ -2\lambda y = 0 \\ 1+2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2 = z^2+1\,. \end{cases}$$

Questo sistema non ha soluzioni.
Studiamo la funzione sul piano $z = \dfrac{x+y}{2}+1$, considerando la funzione

$$g(x,y) = \frac{x+y}{2}+1, \text{ su } x^2+y^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}+1\right)^2+1 = \frac{1}{4}\left(x^2+y^2+2xy+4x+4y+8\right).$$

Il gradiente di g vale $\nabla g = (1/2, 1/2)$ quindi non ci sono punti stazionari sul piano. Consideriamo allora la funzione

$$L(x,y,\lambda) = \frac{x+y}{2}+1-\lambda\left(\frac{3x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}-\frac{xy}{2}-x-y-2\right).$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \lambda\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{y}{2} - 1\right) = 0, \\ \dfrac{1}{2} - \lambda\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{3y}{2} - 1\right) = 0 \\ \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{3y^2}{4} - \dfrac{xy}{2} - x - y = 2 \end{cases} .$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo

$$\begin{cases} \lambda\,(2x - 2y) = 0, \\ \dfrac{1}{2} - \lambda\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{3y}{2} - 1\right) = 0 \\ \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{3y^2}{4} - \dfrac{xy}{2} - x - y = 2\,. \end{cases}$$

Non può essere $\lambda = 0$, quindi $y = x$ e dall'ultima equazione

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad g(1 \pm \sqrt{3}, 1 \pm \sqrt{3}) = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Studiamo infine la funzione sul piano $z = \dfrac{x + y - 3}{2}$, considerando la funzione

$$g(x, y) = \frac{x + y - 3}{2}, \text{ su } x^2 + y^2 \leq \left(\frac{x + y - 3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 13\right).$$

Il gradiente di g vale $\nabla g = (1/2, 1/2)$ quindi non ci sono punti stazionari sul piano. Consideriamo allora la funzione

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x + y - 3}{2} - \frac{\lambda}{4}\left(3x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x + 6y - 13\right).$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{4}\,(6x - 2y + 6) = 0, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{4}\,(-2x + 6y + 6) = 0 \\ 3x^2 - 2xy + 6x + 3y^2 + 6y = 13\,. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo

$$\begin{cases} \lambda\,(8x-8y)=0, \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\lambda}{4}\,(-2x+6y+6)=0 \\ 3x^2-2xy+6x+3y^2+6y=13 \end{cases} .$$

Non può essere $\lambda=0$, quindi $y=x$ e dall'ultima equazione

$$4x^2+12x-13=0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{88}}{4} \quad\Longrightarrow$$

$$g\left(\frac{-3\pm\sqrt{22}}{2},\frac{-3\pm\sqrt{22}}{2}\right)=-\frac{1}{2}(6\pm\sqrt{22}).$$

In conclusione

$$\max_E f=2+\sqrt{3}\,,\qquad \min_E f=-\frac{1}{2}(6+\sqrt{22})\,.$$

4. La superficie è cartesiana pertanto, inserendo l'elemento d'area e usando le coordinate polari, otteniamo

$$\int_\Sigma z\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^1\varrho^2\sqrt{1+4\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho=2\pi\int_0^1\varrho^2\sqrt{1+4\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho$$

usiamo la sostituzione $1+4\varrho^2=t^2\implies 8\varrho\,d\varrho=2t\,dt,\quad \varrho^2=\dfrac{t^2-1}{4}$

$$=\frac{\pi}{8}\int_1^{\sqrt{5}}(t^4-t^2)\,dt=\frac{\pi}{8}\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(\frac{25\sqrt{5}}{5}-\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{15}\right)=\frac{\pi}{8}\left(\frac{10\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{15}\right)=\frac{\pi}{60}\left(25\sqrt{5}+1\right).$$

5. Per calcolare l'integrale proposto, consideriamo la funzione

$$g(z)=\frac{z\,\mathrm{e}^{i\,\pi z}}{z^2-4z+5}$$

che ha due poli semplici in $z=2\pm i$, e consideriamo il circuito φ_r formato dal segmento $[-r,r]$ e dalla semicirconferenza $r\,\mathrm{e}^{i\,\vartheta}$ con $0\le\vartheta\le\pi$. All'interno del circuito c'è solo il punto $z=2+i$ dove

$$\mathrm{Res}(g(z),z=2+i)=\left[\frac{z\,\mathrm{e}^{i\,\pi z}}{2z-4}\right]_{z=2+i}=\frac{(2+i)\,\mathrm{e}^{-\pi+2\pi\,i}}{2i}\,.$$

Per il Teorema dei residui e per la periodicità dell'esponenziale complesso otteniamo ($r > \sqrt{5}$)

$$\int_{\varphi_r} g(z)\,dz = \int_{\varphi_r} \frac{z\,\mathrm{e}^{i\,\pi z}}{z^2-4z+5}\,dz = 2\pi\,i\,\frac{(2+i)\,\mathrm{e}^{-\pi}}{2i} = \pi\ \mathrm{e}^{-\pi}(2+i).$$

Per il Lemma di Jordan, l'integrale sulla semicirconferenza tende a zero, quindi uguagliando le parti immaginarie otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2-4x+5} = \pi\ \mathrm{e}^{-\pi}\ .$$

26 Compito di Analisi Matematica II del 27/02/12

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy'' = (y')^2 + y^2 \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E x^2\, dxdydz\,,$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 4\ ,\ x^2+y^2 \le 1\ \right\}.$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = z$$

nell'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \le z^2+1,\ -2 \le x+y-2z \le 3\ \right\}.$$

4. Studiare la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{5x}{6+x^2}\right)^h$$

e calcolarne la somma.

Soluzione del compito del 27/02/12

1. Vedi compito precedente.

2. Vedi compito precedente.

3. Vedi compito precedente.

4. La serie si riconduce ad una serie di potenze con la sostituzione $y = \dfrac{5x}{6+x^2}$. In questo modo otteniamo la serie geometrica, che ha raggio di convergenza $\varrho = 1$ e per cui
$$\sum_{h=0}^{\infty} y^h = \frac{1}{1-y} \qquad |y| < 1\,,$$
con convergenza assoluta in $(-1,1)$ e totale in $(-r,r)$ con $0 < r < 1$. Ritorniamo nella variabile x, e risolviamo il sistema
$$\begin{cases} \dfrac{5x}{6+x^2} < 1 \\ \dfrac{5x}{6+x^2} > -1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{-x^2+5x-6}{6+x^2} < 0 \\ \dfrac{x^2+5x+6}{6+x^2} > 0\,. \end{cases}$$
Poiché i denominatori sono positivi, otteniamo
$$x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \;\text{ e }\; x \in (-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)\,,$$
perciò la serie converge assolutamente in $(-\infty,-3) \cup (-2,2) \cup (3,+\infty)$ e converge totalmente in $(-\infty,-b) \cup (-a,a) \cup (b,+\infty)$ con $0 < a < 2$ e $b > 3$. La somma della serie vale $\dfrac{x^2+6}{x^2-5x+6}$.

27 Compito di Analisi Matematica II del 27/04/12

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy'' + (y')^2 = 1 \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E z\,dxdydz\,,$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\ ,\ z \geq 0\ \right\}.$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = x + 2y + z$$

nell'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \leq 1\ \right\}.$$

4. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma z\,d\sigma\,,$$

dove Σ è la semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$.

5. Calcolare l'antitrasformata di Laplace della seguente funzione

$$f(s) = \frac{3s^2 + 3s + 2}{(s-1)(s^2 + 2s + 5)}.$$

Soluzione del compito del 27/04/12

1. L'equazione differenziale è autonoma dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ da cui $z'(y)y' = z'(y)z(y) = y''$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} yzz' = 1 - z^2 \\ z(1) = 1, \end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Non è necessario separare le variabili in quanto l'espressione a destra nell'uguaglianza vale zero nel punto iniziale. Questo significa che $z(y) = 1$ è la soluzione stazionaria del P.d.C.
Ritornando nell'incognita $y(x)$ abbiamo il problema

$$\begin{cases} y' = 1 \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad y(x) = x + c,\ y(0) = 1, \quad \Longrightarrow \quad y(x) = x + 1.$$

Naturalmente si può procedere anche diversamente. Dividendo per yz (che è diverso da zero) otteniamo

$$z' = \frac{1}{y\,z} - \frac{z}{y}.$$

Questa equazione è di Bernoulli con $\alpha = -1$ e si può proseguire risolvendola con la sostituzione $w = z^2$. Il primo metodo è molto più rapido.

2. Il dominio di integrazione è la metà superiore di un ellissoide di rotazione intorno all'asse z. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali, imponendo $4\varrho^2 + z^2 \le 4$ e $z \ge 0$, abbiamo

$$0 \le z \le \sqrt{4 - 4\varrho^2} = 2\sqrt{1 - \varrho^2}, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \qquad 0 \le \varrho \le 1.$$

Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned} &\iiint_E z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho\,d\varrho \int_0^{2\sqrt{1-\varrho^2}} z\,dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\Big[z^2\Big]_0^{2\sqrt{1-\varrho^2}} \varrho\,d\varrho = 2\pi \int_0^1 (2\varrho - 2\varrho^3)\,d\varrho = 2\pi \left[\varrho^2 - \frac{\varrho^4}{2}\right]_0^1 = \pi\,. \end{aligned}$$

3. Il dominio A è chiuso e limitato, la funzione f è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f.
Il gradiente della funzione f è costante, $\nabla f(x, y, z) = (1, 2, 1)$, pertanto essa non ha punti stazionari liberi. Consideriamo il vincolo $x^2+y^2+z^2 = 4$. Usando

il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo la funzione $L(x, y, z, \lambda) = x + 2y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 2 - 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\,. \end{cases}$$

Evidentemente, dalle prime tre equazioni otteniamo $y = 2x = 2z$. Sostituendo nella quarta equazione otteniamo

$$6x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,,\ y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,,\ z = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

I punti trovati appartengono all'insieme ed in essi la funzione f vale $2\sqrt{6}$ oppure $-2\sqrt{6}$. Studiamo la funzione sul piano $z = 1$, considerando la funzione

$$g(x, y) = x + 2y + 1,\ \text{su}\ \ x^2 + y^2 \leq 3.$$

Il gradiente di g vale $\nabla g = (1, 2)$ quindi non ci sono punti stazionari sul piano. Consideriamo infine la funzione lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + 1 - \lambda\left(x^2 + y^2 - 3\right).$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0, \\ 2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \quad . \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 2x, \\ 5x^2 = 3 \quad . \end{cases}$$

In definitiva

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}\,, \quad y = \pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}\,.$$

In questi punti la funzione g vale $\pm\sqrt{15} + 1$ In conclusione

$$\max_A f = 2\sqrt{6}\,, \qquad \min_A f = -2\sqrt{6}\,.$$

4. La superficie è cartesiana in quanto $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

pertanto, inserendo l'elemento d'area e usando le coordinate polari, otteniamo

$$\int_\Sigma z\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{1-\varrho^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\,\varrho\,d\varrho = 2\pi\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 = \pi\,.$$

5. Dal metodo dei fratti semplici otteniamo

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{3s^2+3s+2}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{1}{s-1} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{2s+3}{(s+1)^2+4} = \frac{1}{s-1} + \frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{(s+1)^2+4}\,, \end{aligned}$$

dunque l'antitrasformata di Laplace di f è

$$F(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\left(2\cos 2t + \frac{1}{2}\,\sin 2t\right).$$

Un esercizio di Matematica Applicata

Utilizzando i metodi dell'analisi complessa, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2-2x+5}\,dx\,.$$

Soluzione. Il denominatore non si annulla in $\mathbb{R}$; le sue radici sono $z = 1 \pm 2\,i$. Per calcolare l'integrale richiesto consideriamo l'integrale

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{2iz}}{z^2-2z+5}\,dz, \qquad \text{dove } \gamma = \gamma_{1,R} \oplus \gamma_{2,R},$$

e $\gamma_{1,R}(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$ per $t \in [0,\pi]$, $\gamma_{2,R}(t) = t$ per $t \in [-R,R]$. Dal Teorema dei residui segue

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{2iz}}{z^2-2z+5}\,dz = 2\pi\,i\,\mathrm{Res}(f, 1+2i)\,.$$

Poiché

$$\mathrm{Res}(f,1+2i) = \left[\frac{\mathrm{e}^{2iz}}{2z-2}\right]_{z=1+2i} = \frac{\mathrm{e}^{2i-4}}{4i}\,,$$

concludiamo, passando al limite per $R \to +\infty$, usando il Lemma di Jordan e considerando solo la parte immaginaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2 - 2x + 5}\, dx = \frac{\pi \sin 2}{2\,\mathrm{e}^4}\,.$$

28 Compito di Analisi Matematica II del 27/04/12

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy'' + (y')^2 = 1 \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E z\, dxdydz\,,$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\ ,\ z \geq 0\ \right\}\ .$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = x + 2y + z$$

nell'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \leq 1\ \right\}.$$

4. Determinare la serie di Fourier della funzione 1-periodica definita per $x \in [0,1]$ da

$$f(x) = 1 - x^2\,,$$

precisandone le proprietà di convergenza. Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2}\,.$$

Soluzione del compito del 27/04/12

1. Vedi compito precedente.

2. Vedi compito precedente.

3. Vedi compito precedente.

4. La funzione è 1-periodica, dunque $\omega = 2\pi$. La funzione non è né pari né dispari. è regolare a tratti e discontinua nei punti $x \in \mathbb{Z}$. Calcoliamo i coefficienti di Fourier:

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,,$$

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 (1-x^2)\cos(2k\pi\,x)\,dx \\ &= 2\left[(1-x^2)\frac{\sin(2k\pi\,x)}{2k\pi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 2x\,\frac{\sin(2k\pi\,x)}{2k\pi}\,dx \\ &= 4\left[-x\,\frac{\cos(2k\pi\,x)}{4k^2\pi^2}\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{\cos(2k\pi\,x)}{4k^2\pi^2}\,dx \\ &= -\frac{\cos(2k\pi)}{k^2\pi^2} + \left[\frac{\sin(2k\pi\,x)}{2k^3\pi^3}\right]_0^1 = -\frac{1}{k^2\pi^2}\,, \end{aligned}$$

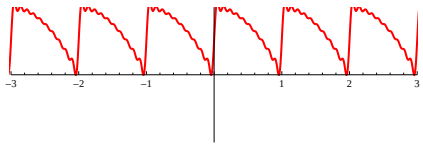
$$\begin{aligned} b_k &= 2\int_0^1 (1-x^2)\sin(2k\pi\,x)\,dx \\ &= 2\left[-(1-x^2)\frac{\cos(2k\pi\,x)}{2k\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 2x\,\frac{\cos(2k\pi\,x)}{2k\pi}\,dx \\ &= \frac{1}{k\pi} - 4\left[x\,\frac{\sin(2k\pi\,x)}{4k^2\pi^2}\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{\sin(2k\pi\,x)}{4k^2\pi^2}\,dx \\ &= \frac{1}{k\pi} - \left[\frac{\cos(2k\pi\,x)}{2k^3\pi^3}\right]_0^1 = \frac{1}{k\pi}\,. \end{aligned}$$

Dunque la serie di Fourier è

$$f^*(x) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k^2\pi^2}\,\cos(2k\pi\,x) + \frac{1}{k\pi}\,\sin(2k\pi\,x)\right)$$

ed essa converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e uniformemente negli intervalli chiusi che non contengono numeri interi. Per $x = 0$ otteniamo

$$f^*(0) = \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$



Una somma parziale della serie di Fourier di f.

29 Compito di Analisi Matematica II del 25/06/12

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y'(1 + (y')^2) \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

   Precisare l'intervallo di definizione della soluzione massimale.

2. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = y$$

   nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\ \}$.

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy\,,$$

   dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\,,\ x \geq 0\ \}$.

4. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma x^2\, d\sigma\,,$$

   dove Σ è il grafico della funzione $z = x + y$ definita sul dominio

$$D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\ \}\ .$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione f, precisando prima le proprietà di f e di $\hat{f}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione del compito del 25/06/12

1. Nell'equazione differenziale mancano la variabile indipendente x e la funzione incognita y dunque possiamo usare la sostituzione $z(x) = y'(x)$ da cui $z'(x) = y''(x)$ conservando x come variabile indipendente, oppure possiamo usare la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ da cui $z'(y)y' = z'(y)z(y) = y''$ con y come variabile indipendente. Scegliendo la seconda sostituzione dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} zz' = z(1+z^2) \\ z(0) = 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z' = (1+z^2) \\ z(0) = 1, \end{cases}$$

Separando le variabili e integrando otteniamo

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dy \quad \Longrightarrow \quad \arctan z = y + c \quad \Longrightarrow \quad z = \tan(y+c).$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = \pi/4$.
Ritornando nell'incognita $y(x)$ abbiamo il problema

$$\begin{cases} y'(x) = \tan(y(x) + \pi/4) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Separando le variabili e integrando otteniamo

$$\int \frac{dy}{\tan(y(x)+\pi/4)} = \int dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\cos(y+\pi/4)}{\sin(y+\pi/4)}\, dy = x + k,$$

e dunque

$$\log(\sin(y+\pi/4)) = x + k \quad \Longrightarrow \quad \sin(y+\pi/4) = \mathrm{e}^{x+k} = \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^k\,.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $\mathrm{e}^k = \sqrt{2}/2$. In definitiva la soluzione è

$$y(x) = \arcsin\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}\,.$$

Il dominio della soluzione massimale è

$$-1 < \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} < 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in (-\infty, \log(\sqrt{2}))\,.$$

N.B.: Per l'analogo P.d.C.

$$\begin{cases} y'' = y'(1-(y')^2) \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,, \end{cases}$$

procedendo nella stessa maniera si ottiene

$$\begin{cases} z' = (1 - z^2) \\ z(0) = 1, \end{cases}$$

che ha la soluzione stazionaria $z(y) = 1$, quindi $y'(x) = 1$, da cui $y(x) = x + c$ e per la condizione iniziale otteniamo la soluzione $y(x) = x$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

2. Il dominio C è definito da un'equazione, quindi è chiuso e non ha parte interna. Verifichiamo che è limitato. Risulta

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \leq x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad y^2 \leq 1.$$

Dunque il dominio è compatto, la funzione f è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f.
Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo la funzione $L(x, y, \lambda) = y - \lambda((x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -\lambda(2(x^2 + y^2)2x - 2x) = 0 \\ 1 - \lambda(2(x^2 + y^2)2y + 2y) = 0 \\ (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, fattorizzando, otteniamo $2x\lambda(2(x^2+y^2)-1) = 0$. Non può essere $\lambda = 0$ per via della seconda equazione. Per $x = 0$, dalla terza equazione segue $y = 0$. Resta solo il caso

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 - 4\lambda y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{4\lambda} \,.$$

Dalla prima uguaglianza otteniamo

$$x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16\lambda^2} \,.$$

Sostituendo nella terza equazione otteniamo

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16\lambda^2} - \frac{1}{16\lambda^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\lambda^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{8\lambda^2} = \frac{1}{4} \,.$$

In definitiva

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \,, \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \,.$$

Confrontando le ordinate dei punti trovati concludiamo che

$$\max_C f = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,, \qquad \min_C f = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

3. Utilizziamo le coordinate polari. La disequazione $x = \varrho\cos\vartheta \geq 0$ fornisce $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$. L'altra disequazione fornisce

$$\varrho^4 \leq \varrho^2\cos^2\vartheta - \varrho^2\sin^2\vartheta = \varrho^2\cos 2\vartheta \quad \Longrightarrow \quad \varrho^2 \leq \cos 2\vartheta\,,\ \cos 2\vartheta \geq 0.$$

L'ultima disequazione comporta $-\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/4$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned}
&\iint_E \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{\cos 2\vartheta}} \sqrt{1-\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho \\
&= 2\int_0^{\pi/4} \left[-\frac{(1-\varrho^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\vartheta}} d\vartheta = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4} (1-(1-\cos 2\vartheta)^{3/2})\,d\vartheta = \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4} (2\sin^2\vartheta)^{3/2}\,d\vartheta = \frac{\pi}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/4} \sin^3\vartheta\,d\vartheta \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/4} (\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\pi}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{6\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{5\sqrt{2}}{12} - \frac{8\sqrt{2}}{9} = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{9} - \frac{8\sqrt{2}}{9}\,.
\end{aligned}$$

4. La superficie è cartesiana in quanto $z = x + y$. L'elemento d'area è $d\sigma = \sqrt{3}\,dxdy$. Usando le coordinate polari, otteniamo che il dominio è dato da $\varrho^2 - 2\varrho\cos\vartheta \leq 0$ e dunque $0 \leq \varrho \leq 2\cos\vartheta$ e $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$, pertanto

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma x^2\,d\sigma &= \sqrt{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \varrho^2\cos^2\vartheta\,\varrho\,d\varrho \\
&= 2\sqrt{3}\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{2\cos\vartheta} d\vartheta \ = 8\sqrt{3}\int_0^{\pi/2} \cos^6\vartheta d\vartheta\,.
\end{aligned}$$

Calcoliamo una primitiva di $\cos^6\vartheta$.

$$\begin{aligned}
\int \cos^6\vartheta d\vartheta &= \int (1-\sin^2\vartheta)\cos^4\vartheta d\vartheta = \int \cos^4\vartheta d\vartheta - \int \sin^2\vartheta\cos^4\vartheta d\vartheta \\
&= \int (1-\sin^2\vartheta)\cos^2\vartheta d\vartheta + \sin\vartheta\frac{\cos^5\vartheta}{5} - \int \frac{\cos^6\vartheta}{5}\,d\vartheta\,.
\end{aligned}$$

Portando l'integrale di $\cos^6\vartheta$ al primo membro otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{6}{5}\int\cos^6\vartheta d\vartheta &= \int\cos^2\vartheta d\vartheta - \int\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta + \sin\vartheta\frac{\cos^5\vartheta}{5}\\ &= \frac{\vartheta+\sin\vartheta\cos\vartheta}{2} - \frac{1}{4}\int\sin^2 2\vartheta\, d\vartheta + \sin\vartheta\frac{\cos^5\vartheta}{5}\\ &= \frac{\vartheta+\sin\vartheta\cos\vartheta}{2} - \frac{2\vartheta+\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta}{16} + \sin\vartheta\frac{\cos^5\vartheta}{5}\,.\end{aligned}$$

Concludendo

$$\begin{aligned}\int_\Sigma x^2\, d\sigma &= 8\sqrt{3}\,\frac{5}{6}\left[\frac{\vartheta+\sin\vartheta\cos\vartheta}{2} - \frac{2\vartheta+\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta}{16} + \sin\vartheta\frac{\cos^5\vartheta}{5}\right]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{20}{3}\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{4}\,\pi\,.\end{aligned}$$

N.B.: Questo calcolo si può semplificare notevolmente usando la formula di Eulero $\cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$ e lo sviluppo del binomio di Newton. Infatti

$$\begin{aligned}&8\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\cos^6\vartheta d\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi/2}\left(e^{6i\vartheta}+6\,e^{4i\vartheta}+15\,e^{2i\vartheta}+20+15\,e^{-2i\vartheta}+6\,e^{-4i\vartheta}+e^{-6i\vartheta}\right)d\vartheta\\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi/2}(2\cos 6\vartheta+12\cos 4\vartheta+30\cos 2\vartheta+20)\,d\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{8}\,10\pi = \frac{5\sqrt{3}}{4}\,\pi\,.\end{aligned}$$

5. La funzione f è reale e pari, perciò $\hat f$ è reale e pari. Poiché f è a supporto compatto, $x^k f\in L^1(\mathbb{R})$ per ogni k, perciò $\hat f\in C^\infty(\mathbb{R})$. Calcoliamo $\hat f$ usando la definizione. Per $\xi\neq 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}\hat f(\xi) &= \int_{-1}^1(1-x^2)\,e^{-ix\xi}\,dx = \left[(1-x^2)\,\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -2x\,\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\,dx\\ &= \left[2x\,\frac{e^{-ix\xi}}{-\xi^2}\right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2\,\frac{e^{-ix\xi}}{\xi^2}\,dx = -2\,\frac{e^{-i\xi}+e^{i\xi}}{\xi^2} + \left[2\,\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi^3}\right]_{-1}^1\\ &= -4\,\frac{\cos\xi}{\xi^2} - 2\,\frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{i\xi^3} = -4\,\frac{\cos\xi}{\xi^2} + 4\,\frac{\sin\xi}{\xi^3} = 4\,\frac{\sin\xi-\xi\cos\xi}{\xi^3}\,.\end{aligned}$$

Per $\xi=0$ otteniamo

$$\int_{-1}^1(1-x^2)\,dx = 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,.$$

Un esercizio di Matematica Applicata

Risolvere mediante la trasformata di Laplace il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y''(t) + 2Y'(t) + 5Y(t) = H(t-1) \quad t > 0, \\ Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Soluzione. La trasformata di Laplace di $H(t-1)$ è $\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s}$. Trasformiamo l'equazione, tenendo conto dei dati iniziali. Otteniamo

$$s^2 y - 1 + 2sy + 5y = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{s + \mathrm{e}^{-s}}{s(s^2 + 2s + 5)}\,.$$

Antitrasformiamo il secondo membro:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2 + 2s + 5)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,.$$

Usando i fratti semplici troviamo

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}\right)\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s(s^2 + 2s + 5)}\right) &= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} - \mathrm{e}^{-s}\,\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} - \mathrm{e}^{-s}\,\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-(t-1)}\cos 2(t-1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right)\,H(t-1)\,. \end{aligned}$$

In definitiva otteniamo

$$Y(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + \frac{1}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-(t-1)}\cos 2(t-1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right)\,H(t-1)\,.$$

30 Compito di Analisi Matematica II del 25/06/12

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y'(1 + (y')^2) \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

   Precisare l'intervallo di definizione della soluzione massimale.

2. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = y$$

   nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\ \}$.

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy\,,$$

   dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\,,\ x \geq 0\ \}$.

4. Determinare la serie di Fourier della funzione 1-periodica definita per $x \in [0, 1]$ da

$$f(x) = 1 - x\,,$$

   precisandone le proprietà di convergenza. Utilizzare l'uguaglianza di Parseval per calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

Soluzione del compito del 25/06/12

1. Vedi compito precedente.

2. Vedi compito precedente.

3. Vedi compito precedente.

4. La funzione è 1-periodica, dunque $\omega = 2\pi$. La funzione non è né pari né dispari, ma, sottraendo $1/2$, diventa dispari. Comunque calcoleremo tutti i coefficienti di Fourier. La funzione è regolare a tratti e discontinua nei punti $x \in \mathbb{Z}$. Dunque la sua serie di Fourier converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e uniformemente negli intervalli chiusi che non contengono numeri interi.
   Calcoliamo i coefficienti di Fourier:

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1\,,$$

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 (1-x)\cos(2k\pi\,x)\,dx \\ &= 2\left[(1-x)\frac{\sin(2k\pi\,x)}{2k\pi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sin(2k\pi\,x)}{2k\pi}\,dx = 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= 2\int_0^1 (1-x)\sin(2k\pi\,x)\,dx \\ &= 2\left[-(1-x)\frac{\cos(2k\pi\,x)}{2k\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\cos(2k\pi\,x)}{2k\pi}\,dx \\ &= \frac{1}{k\pi} - 2\left[\frac{\sin(2k\pi\,x)}{4k^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{1}{k\pi}\,. \end{aligned}$$

   Dunque la serie di Fourier è

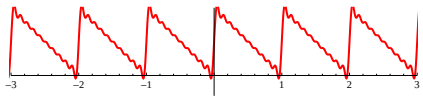
$$f^*(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\,\sin(2k\pi\,x)\,.$$

   Per utilizzare l'uguaglianza di Parseval calcoliamo l'integrale

$$2\int_0^1 (1-x)^2 dx = 2\left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

Allora

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$



Una somma parziale della serie di Fourier di f.

31 Compito di Analisi Matematica II del 23/07/12

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = \mathrm{e}^x \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Determinare, se esistono, i punti di massima e di minima distanza dall'origine appartenenti all'insieme

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2 + y^2 - xy - 4 = 0 \right\}.$$

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E z\, dxdydz\,,$$

dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x^2 + z^2 \leq 4\,,\ z \geq 0\ \}$.

4. Determinare, se esiste, il potenziale del campo vettoriale

$$\left(\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,, - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Calcolare l'integrale curvilineo del campo lungo il segmento che unisce il punto $(-1, 1)$ con $(1, 1)$.

5. Calcolare l'antitrasformata di Laplace della seguente funzione

$$f(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}.$$

Come compito per il C.d.L. in Ingegneria Industriale e i corsi del D.M.509 sono stati assegnati i primi 4 esercizi.

Soluzione del compito del 23/07/12

1. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata risolvendo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0\,.$$
Otteniamo $\lambda = 1$ oppure $\lambda = 4$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^x + c_2\ \mathrm{e}^{4x}\ .$$
Poiché il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea associata, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = A\,x\ \mathrm{e}^x$. Sostituendo nell'equazione troviamo $A = -\dfrac{1}{3}$, perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^x + c_2\ \mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{3}\,x\ \mathrm{e}^x\,.$$
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 4c_2 - \frac{1}{3} = 0\,. \end{cases}$$
Dunque la soluzione è
$$-\frac{1}{9}\ \mathrm{e}^x + \frac{1}{9}\ \mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{3}\,x\ \mathrm{e}^x\ .$$

2. Il dominio C è definito da un'equazione, quindi è chiuso e non ha parte interna. Verifichiamo che è limitato. Risulta
$$4 = x^2 + y^2 - xy \geq x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 8.$$
Dunque il dominio è compatto. Per semplicità consideriamo il quadrato della distanza dall'origine, ossia la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$. Essa è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f su C.
Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo la funzione $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - xy - 4)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} 2x - \lambda(2x - y) = 0 \\ 2y - \lambda(2y - x) = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 4\,. \end{cases}$$

Sommando la prima e la seconda equazione, otteniamo

$$\begin{cases} 2(x+y)-\lambda(2(x+y)-(y+x))=0 \\ 2y-\lambda(2y-x)=0 \\ x^2+y^2-xy=4\,. \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} (x+y)(2-\lambda)=0 \\ 2y-\lambda(2y-x)=0 \\ x^2+y^2-xy=4\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $y=-x$ oppure $\lambda=2$. Per $y=-x$, dalla terza equazione segue $3x^2=4$ e dunque

$$f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\mp\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{8}{3}.$$

Nel caso $\lambda=2$, dalla seconda equazione otteniamo $y=x$. Allora dalla terza equazione segue $x^2=4$ e dunque

$$f\left(\pm 2,\pm 2\right)=8.$$

Confrontando i valori trovati, ed estraendo la radice quadrata per avere la distanza, concludiamo che

$$\max_C \sqrt{f}=2\sqrt{2}\,,\qquad \min_C \sqrt{f}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,.$$

3. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ,ϑ,z), nelle quali abbiamo $0\le\varrho\le 2$, $0\le\vartheta\le 2\pi$ e $0\le z\le\sqrt{4-\varrho^2\cos^2\vartheta}$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned} \iiint_E z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 \varrho\,d\varrho \int_0^{\sqrt{4-\varrho^2\cos^2\vartheta}} z\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-\varrho^2\cos^2\vartheta}} \varrho\,d\varrho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 \frac{1}{2}\left(4-\varrho^2\cos^2\vartheta\right)\varrho\,d\varrho \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\varrho^2-\frac{\varrho^4}{8}\cos^2\vartheta\right]_0^2 d\vartheta = \int_0^{2\pi}\left(4-2\cos^2\vartheta\right)d\vartheta = 8\pi-2\pi=6\pi\,. \end{aligned}$$

4. Il campo (indichiamolo con F) è definito in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{2y(x^2+y^2)^2-4y(x^2+y^2)(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{6yx^2-2y^3}{(x^2+y^2)^3}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)=-\frac{2y(x^2+y^2)^2-8x^2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-2y^3+6x^2y}{(x^2+y^2)^3}\,.$$

Dunque il campo è irrotazionale ma è definito su un insieme che non è semplicemente connesso. Se consideriamo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$ otteniamo

$$\int_\gamma F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \left((-\cos^2 t + \sin^2 t)(-\sin t) - 2 \sin t \cos^2 t\right) dt = 0.$$

Verifichiamo allora se esiste un potenziale definito su tutto il dominio.
Per trovare il potenziale integriamo la seconda componente rispetto a y:

$$\int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \frac{x}{(x^2+y^2)} + c(x)\,.$$

Derivando rispetto a x e uguagliando alla prima componente del campo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)} + c(x)\right) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(x) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ricaviamo che $c'(x) = 0$, dunque $c(x) = c$ e i potenziali sono:

$$\frac{x}{(x^2+y^2)} + c\,.$$

Dal teorema sull'integrale curvilineo in un campo conservativo, otteniamo

$$\int_\gamma F \cdot d\ell = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,,$$

dove γ è il segmento che unisce il punto $(-1, 1)$ con $(1, 1)$.

5. Determiniamo la decomposizione in fratti semplici della funzione f, ottenendo:

$$f(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5} = \frac{(A+B)s^2 + (2A+B+C)s + 5A + C}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

da cui $A = B = C = 1/2$. Dunque

$$f(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right),$$

ed allora, utilizzando la regola sulla trasformata della funzione di Heaviside e del coseno, e la regola sulla trasformata della modulazione, si ottiene

$$F(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\cos 2t\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\left(1 + \cos^2 t - \sin^2 t\right) = \mathrm{e}^{-t}\cos^2 t\,.$$

32 Compito di Analisi Matematica II del 4/09/12

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + (y')^2 + 1 = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_E x^2\, dxdydz\,,$$

dove E è l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 + 1 \le z^2 \le 9\,,\ z > 0\right\}\,.$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x$$

nell'insieme $K = \{(x,y);\ 2x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0\}$.

4. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma z\, d\sigma\,,$$

dove Σ è la superficie

$$\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = x^2 + y^2\,,\ x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le y \le x\,\}\,.$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione f, precisando prima le proprietà di f e di $\hat{f}$,

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 4x + 5}.$$

Soluzione del compito del 4/09/12

1. Nell'equazione differenziale manca la funzione incognita y dunque possiamo usare la sostituzione $z(x) = y'(x)$ da cui $z'(x) = y''(x)$, conservando x come variabile indipendente. Scegliendo tale sostituzione, dobbiamo risolvere il P.d.C.
$$\begin{cases} z' = -(1+z^2) \\ z(0) = 1, \end{cases}$$
Separando le variabili e integrando otteniamo
$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\int dx \quad \Longrightarrow \quad \arctan z = -x + c \quad \Longrightarrow \quad z = \tan(-x+c).$$
Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = \pi/4$.
Ritornando nell'incognita $y(x)$ abbiamo il problema
$$\begin{cases} y'(x) = \tan(-x+\pi/4) = -\tan(x-\pi/4) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
Integrando otteniamo
$$y(x) = -\int \tan(x-\pi/4)\,dx = -\int \frac{\sin(x-\pi/4)}{\cos(x-\pi/4)}\,dx = \log(\cos(x-\pi/4)) + k.$$
Imponendo la condizione iniziale otteniamo $k = \log\sqrt{2}$. In definitiva, usando la formula di sottrazione per il coseno, la soluzione è
$$y(x) = \log(\cos(x-\pi/4)) + \log\sqrt{2} = \log\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + \log\sqrt{2} = \log(\cos x + \sin x)\,.$$

2. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali abbiamo $1 + \varrho^2 \le 9$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $1 + \varrho^2 \le z \le 9$. Dunque $0 \le \varrho \le 2\sqrt{2}$ e l'integrale vale
$$\iiint_E x^2\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\sqrt{2}} \varrho\,d\varrho \int_{\sqrt{1+\varrho^2}}^{3} \varrho^2\cos^2\vartheta\,dz$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\,d\vartheta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(3 - \sqrt{1+\varrho^2}\right)\varrho^3\,d\varrho = \pi\left(3\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{2}} - \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\varrho^2}\,\varrho^3\,d\varrho\right)$$

(usando il cambiamento di variabile $t^2 = 1 + \varrho^2 \implies t\,dt = \varrho\,d\varrho$)

$$= \pi \left(48 - \int_1^3 (t^2 - 1)\, t^2\, dt \right) = \pi \left(48 - \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^3 \right)$$
$$= \pi \left(48 - \frac{243}{5} + 9 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \pi \left(\frac{720 - 729 + 135 + 3 - 5}{15} \right) = \frac{124\pi}{15}\,.$$

3. Il dominio K è definito da un'equazione, quindi è chiuso e non ha parte interna. Verifichiamo che è limitato (dal corso di Geometria sappiamo che si tratta di una ellisse). Risulta

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2x = (x - y)^2 + x^2 - 2x = 0 \quad \implies \quad x^2 - 2x \leq 0.$$

Allora per la variabile x otteniamo $0 \leq x \leq 2$ ed allora anche la variabile y è limitata. Dunque il dominio è compatto. La funzione $f(x, y) = x$ è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f su K.
Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo la funzione $L(x, y, \lambda) = x - \lambda(2x^2 - 2xy + y^2 - 2x)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 - \lambda(4x - 2y - 2) = 0 \\ \lambda(2x - 2y) = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, poiché $\lambda = 0$ non è accettabile, otteniamo

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 - 2x = 0\,. \end{cases}$$

Allora i punti stazionari sono $(0, 0)$ e $(2, 2)$. Dunque

$$\max_K f = 2\,, \qquad \min_K f = 0\,.$$

4. La superficie è cartesiana in quanto $z = x^2 + y^2$. L'elemento d'area è $d\sigma = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy$. Usando le coordinate polari, otteniamo che il dominio

è dato da $0 \le \varrho \le 1$ e $0 \le \vartheta \le \pi/4$, pertanto

$$\int_\Sigma z\, d\sigma = \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \sqrt{1+4\varrho^2}\, d\varrho$$

(usando il cambiamento di variabile $t^2 = 1+4\varrho^2 \implies t\, dt = 4\varrho\, d\varrho$)

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^{\sqrt{5}} \frac{(t^2-1)\, t^2}{16}\, dt = \frac{\pi}{64} \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{64} \left(5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{64} \left(\frac{75\sqrt{5} - 25\sqrt{5} - 3 + 5}{15}\right) = \frac{\pi}{480} \left(25\sqrt{5} + 1\right).$$

5. Il denominatore non si annulla in $\mathbb{R}$, perciò la funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat f$ è infinitesima all'infinito di ordine arbitrariamente grande. Calcoliamo $\hat f$ usando le regole di trasformazione. Osserviamo che

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2+4x+5} = \frac{\cos x}{(x+2)^2+1}.$$

Posto

$$h(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{sappiamo che} \qquad \hat h(\xi) = \pi\ \mathrm{e}^{-|\xi|},$$

e posto $g(x) = h(x+2)$ risulta

$$\hat g(\xi) = \pi\ \mathrm{e}^{-|\xi| + 2i\,\xi}\,.$$

Infine otteniamo

$$\hat f(\xi) = \frac{\pi}{2} \left(\mathrm{e}^{-|\xi-1| + 2i\,(\xi-1)} + \mathrm{e}^{-|\xi+1| + 2i\,(\xi+1)}\right) = \frac{\pi\ \mathrm{e}^{2i\,\xi}}{2} \left(\mathrm{e}^{-|\xi-1| - 2i} + \mathrm{e}^{-|\xi+1| + 2i}\right).$$

33 Compito di Analisi Matematica II del 4/09/12

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + (y')^2 + 1 = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_E y^2\, dxdydz\,,$$

dove E è l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 + 1 \le z^2 \le 9\,,\ z > 0\right\}\,.$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = y$$

nell'insieme $K = \{(x,y);\ 2x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0\}$.

4. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma z\, d\sigma\,,$$

dove Σ è la superficie

$$\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = x^2 + y^2\,,\ x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le y \le x\,\}\,.$$

Soluzione del compito del 4/09/12

Gli svolgimenti sono perfettamente analoghi ai primi quattro del compito precedente, perciò riportiamo solo le soluzioni

1. $y(x) = \log(\cos x) + 1$.
2. Come nel compito precedente.
3. $\max_K f = 1 + \sqrt{2}\,, \qquad \min_K f = 1 - \sqrt{2}\,.$
4. Vedi compito precedente.

34 Compito di Analisi Matematica II del 19/09/12

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^x \sin 2x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_E z\, dxdydz\,,$$

dove E è l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 \le z^2\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z\right\}\,.$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x + y$$

nell'insieme $K = \{(x,y);\ x^2 - xy + y^2 - y \le 0\}$.

4. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma z^3\, d\sigma\,,$$

dove Σ è la superficie

$$\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 \le 1\,,\ x^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0\,\}\,.$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione f, precisando prima le proprietà di f e di $\hat{f}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\cos x & \text{per} \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2\,, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione del compito del 19/09/12

1. L'equazione è lineare non omogenea con termine noto di tipo particolare. Studiamo prima l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2-2\lambda+5=0$, le cui soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2\,i,$$

allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^x \cos 2x + c_2\,\mathrm{e}^x \sin 2x.$$

Poiché il termine noto $\mathrm{e}^x \sin 2x$ è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = x\ \mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Calcolando le derivate di $\bar{y}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\bar{y}'(x) =& \mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x)\\ &+ x\ \mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + x\ \mathrm{e}^x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),\end{aligned}$$

e, raggruppando alcuni termini uguali,

$$\begin{aligned}\bar{y}''(x) =& 2\,\mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2\,\mathrm{e}^x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)\\ &+ x\ \mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2x\ \mathrm{e}^x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)\\ &- 4x\ \mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x).\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione, e considerando che i termini contenenti il fattore x si semplificano, troviamo:

$$\begin{aligned}&2\,\mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2\,\mathrm{e}^x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)\\ &-2\,\mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x)\\ &= \mathrm{e}^x\Big((2A + 4B - 2A)\cos 2x + (2B - 4A - 2B)\sin 2x\Big) = \mathrm{e}^x\ \sin 2x.\end{aligned}$$

Semplificando e uguagliando i coefficienti dei termini simili otteniamo: $A = -1/4,\ B = 0$. Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è:

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^x \cos 2x + c_2\,\mathrm{e}^x \sin 2x - \frac{1}{4}\,x\ \mathrm{e}^x \cos 2x\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo $c_1 = 0$ e $2c_2 - 1/4 = 1$, da cui la soluzione:

$$y(x) = \frac{5}{8}\ \mathrm{e}^x \sin 2x - \frac{1}{4}\,x\ \mathrm{e}^x \cos 2x\,.$$

2. Il dominio è l'intersezione di un cono circolare retto con la sfera di raggio 1 centrata in $(0,0,1)$. Per usare le coordinate cilindriche, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \varrho^2 = z^2 \\ \varrho^2 + z^2 = 2z \end{cases} \implies 2z^2 = 2z \implies z(z-1) = 0 \implies z = 0\,,\ z = 1\,.$$

Dunque si ha:

$$0 \le \varrho \le 1\,, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi\,, \quad \varrho^2 + z^2 \le 2z \implies z^2 - 2z + \varrho^2 \le 0\,,$$

e questo comporta

$$1 - \sqrt{1-\varrho^2} \le z \le 1 + \sqrt{1-\varrho^2} \quad \text{e} \quad \varrho \le z\,.$$

Poiché $1 - \sqrt{1-\varrho^2} \le \varrho$, in definitiva abbiamo:

$$\begin{aligned} \iiint_E z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho\,d\varrho \int_\varrho^{1+\sqrt{1-\varrho^2}} z\,dz \\ &= \pi \int_0^1 \Big(\Big(1 + \sqrt{1-\varrho^2}\Big)^2 - \varrho^2 \Big) \varrho\,d\varrho \\ &= \pi \int_0^1 \Big(2 - 2\varrho^2 + 2\sqrt{1-\varrho^2}\Big)\ \varrho\,d\varrho \\ &= \pi \left[\varrho^2 - \frac{1}{2}\varrho^4\right]_0^1 + \pi \int_0^1 2\varrho\,\sqrt{1-\varrho^2}\,d\varrho \\ &= \frac{\pi}{2} - \pi \left[\frac{2}{3}(1-\varrho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}\,. \end{aligned}$$

Se usiamo le coordinate sferiche, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \varrho^2 \sin^2\varphi \le \varrho^2 \cos^2\varphi \\ \varrho^2 \le 2\varrho\cos\varphi \end{cases} \implies 0 \le \varphi \le \pi/4\,, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi\,, \quad 0 \le \varrho \le 2\cos\varphi\,.$$

In definitiva abbiamo:

$$\begin{aligned}\iiint_E z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (\varrho\cos\varphi)\varrho^2\sin\varphi\,d\varrho \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/4}\left[\cos\varphi\sin\varphi\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\ &= 8\pi\int_0^{\pi/4}\cos^5\varphi\sin\varphi\,d\varphi = 8\pi\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{4\pi}{3}\left(-\frac{1}{8}+1\right) = \frac{7\pi}{6}\,.\end{aligned}$$

3. Il dominio K è chiuso e limitato (dal corso di Geometria sappiamo che si tratta della parte di piano delimitata da un'ellisse). La funzione $f(x,y) = x+y$ è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f su K.
Poiché $\nabla f(x,y) = (1,1)$ la funzione non ha punti stazionari interni. Per cercare i punti stazionari sulla frontiera usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,y,\lambda) = x+y-\lambda(x^2-xy+y^2-y)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1-\lambda(2x-y) = 0 \\ 1-\lambda(-x+2y-1) = 0 \\ x^2-xy+y^2-y = 0\,. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima, poiché non può essere $\lambda = 0$, otteniamo

$$\begin{cases} 2x-y = -x+2y-1 \\ x^2-xy+y^2-y = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} y = x+\frac{1}{3} \\ x^2-x^2-\frac{1}{3}\,x+x^2+\frac{2}{3}\,x+\frac{1}{9}-x-\frac{1}{3} = 0\,. \end{cases}$$

La seconda equazione fornisce

$$9x^2-6x-2=0 \qquad\Longrightarrow\qquad x_{1,2} = \frac{1}{3}\left(1\pm\sqrt{3}\right),\quad y_{1,2} = \frac{1}{3}\left(2\pm\sqrt{3}\right)\,.$$

Dunque

$$\max_K f = 1+\frac{2}{3}\sqrt{3}, \qquad \min_K f = 1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

4. La superficie è cartesiana in quanto $z = \sqrt{1-x^2}$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dxdy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari, otteniamo che il dominio è dato da $0 \le \varrho \le 1$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$, pertanto

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma z^3\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (\sqrt{1-\varrho^2\cos^2\vartheta})^3\, \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2\cos^2\vartheta}}\, \varrho\, d\varrho \\
&= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (1-\varrho^2\cos^2\vartheta)\, \varrho\, d\varrho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (\varrho - \varrho^3\cos^2\vartheta)\, d\varrho \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\varrho^2}{2} - \cos^2\vartheta\, \frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos^2\vartheta\right) d\vartheta \\
&= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

5. La funzione f è a supporto compatto, perciò $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed anche $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni k. Allora $\hat f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ed è infinitesima all'infinito. Poiché f è reale e dispari, $\hat f$ è immaginaria pura e dispari. Calcoliamo $\hat f$ usando le regole di trasformazione. Osserviamo che

$$f(x) = x\cos x\, h(x)\,,$$

dove

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2\,, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

per cui (per $\xi \neq 0$)

$$\hat h(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{i\,\xi}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\xi}\,\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\,.$$

Posto $g(x) = x\, h(x)$ risulta

$$\hat g(\xi) = i\,(\hat h(\xi))' = 2i\,\left(-\frac{1}{\xi^2}\,\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + \frac{\pi}{2\xi}\,\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\right).$$

Infine, poiché $f(x) = \cos x\, g(x)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\hat f(\xi) = i\,\Bigg(&-\frac{1}{(\xi-1)^2}\,\sin\left(\frac{\pi(\xi-1)}{2}\right) + \frac{\pi}{2(\xi-1)}\,\cos\left(\frac{\pi(\xi-1)}{2}\right) \\
&-\frac{1}{(\xi+1)^2}\,\sin\left(\frac{\pi(\xi+1)}{2}\right) + \frac{\pi}{2(\xi+1)}\,\cos\left(\frac{\pi(\xi+1)}{2}\right)\Bigg) \\
= \frac{i}{(\xi^2-1)^2}\,&\left(4\xi\,\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + \pi(\xi^2-1)\,\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

35 Compito di Analisi Matematica II del 24/10/12

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione D.M. 270 (5 esercizi)
C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi D.M. 509 (primi 4 esercizi)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy'' - (y')^2 + y^2 = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, 1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$$

definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$, è conservativo. In caso affermativo trovarne un potenziale.

3. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma z\, d\sigma\,,$$

dove Σ è la semisfera

$$\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ z \geq 0\,\}\ .$$

4. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x - y$$

nell'insieme $K = \{(x,y);\ x^2 - xy + y^2 \leq 4\,\}$.

5. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione f, precisando prima le proprietà di f e di $\hat{f}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin x & \text{per} \quad -\pi \leq x \leq \pi\,, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione del compito del 24/10/12

1. L'equazione differenziale è autonoma, dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ da cui $z'(y)y' = z'(y)z(y) = y''$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} 2yzz' - z^2 + y^2 = 0 \\ z(1) = 1, \end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Poiché $z = 0$ non è soluzione, possiamo dividere per z, ottenendo un'equazione di Bernoulli con $\alpha = -1$. Utilizziamo la sostituzione $w = z^2$, da cui $w' = 2z\,z'$. Dividendo per y, dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} w' - \dfrac{1}{y}\,w + y = 0 \\ w(1) = 1. \end{cases}$$

Questa è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Utilizziamo la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine. Risulta

$$A(y) = -\int \frac{dy}{y} = -\log y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-A(y)} = y,$$

e quindi

$$w(y) = y\left(c - \int \frac{1}{y}\,y\,dy\right) = cy - y^2\,.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 2$ e dunque $w = 2y - y^2$. In definitiva

$$z(y) = \sqrt{2y - y^2}\,.$$

A questo punto dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y' = \sqrt{2y - y^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Separando le variabili otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{2y - y^2}}\,dy = \int 1\,dx.$$

Calcolando il primo integrale abbiamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - 1 + 2y - y^2}}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (y-1)^2}}\,dy = \arcsin(y-1).$$

Allora $\arcsin(y-1) = x + c$, per la condizione iniziale troviamo $c = 0$, e in definitiva la soluzione è $y(x) = 1 + \sin x$.

2. Il campo è definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{z}\right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{z}\right) = -\frac{2x}{z^2}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2y}{z}\right) = -\frac{2y}{z^2}\,.$$

Dunque il campo è irrotazionale nei due insiemi convessi $A_1 = \{z > 0\}$ e $A_2 = \{z < 0\}$ dove esso è definito, pertanto è conservativo.
Per trovare il potenziale abbiamo

$$\int \left(1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}\right) dz = z + \frac{x^2+y^2}{z} + c(x,y)\,.$$

Derivando rispetto a x o a y e uguagliando alla prima o alla seconda componente del campo otteniamo $c_x = c_y = 0$, e dunque il potenziale è:

$$z + \frac{x^2+y^2}{z} + c_1\varphi_{A_1} + c_2\varphi_{A_2}\,.$$

3. La superficie è cartesiana in quanto $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari, otteniamo che il dominio è dato da $0 \le \varrho \le 1$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$, pertanto

$$\int_\Sigma z\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{1-\varrho^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\,\varrho\,d\varrho = 2\pi\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 = \pi\,.$$

4. Il dominio K è chiuso e limitato (dal corso di Geometria sappiamo che si tratta della parte di piano delimitata da un'ellisse). La funzione $f(x,y) = x - y$ è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f su K.
Poiché $\nabla f(x,y) = (1,-1)$ la funzione non ha punti stazionari interni. Per cercare i punti stazionari sulla frontiera usiamo il metodo dei moltiplicatori di

Lagrange. Definiamo la funzione $L(x, y, \lambda) = x - y - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 4)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 - \lambda(2x - y) = 0 \\ -1 - \lambda(-x + 2y) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 4\,. \end{cases}$$

Sommando la seconda equazione alla prima, poiché non può essere $\lambda = 0$, otteniamo $y = -x$. Allora dalla terza equazione otteniamo

$$3x^2 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad y_{1,2} = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Dunque

$$\max_K f = \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad \min_K f = -\frac{4}{\sqrt{3}}\,.$$

5. La funzione f è a supporto compatto, perciò $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed anche $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni k. Allora $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ ed è infinitesima all'infinito. Poiché f è reale e pari, $\hat{f}$ è reale e pari. Calcoliamo $\hat{f}$ usando le regole di trasformazione. Osserviamo che

$$f(x) = x \sin x\, h(x)\,,$$

dove

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad -\pi \le x \le \pi\,, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

per cui (per $\xi \neq 0$)

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{i\,\xi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\xi}\, \sin(\pi\xi)\ .$$

Posto $g(x) = x\, h(x)$ risulta

$$\hat{g}(\xi) = i\,(\hat{h}(\xi))' = \frac{2\,i}{\xi^2}\ (\xi\,\pi\,\cos\pi\xi - \sin\pi\xi)\,.$$

Infine, poiché $f(x) = \sin x\, g(x)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) = {} & \frac{1}{(\xi-1)^2}\ ((\xi-1)\,\pi\,\cos(\pi(\xi-1)) - \sin(\pi(\xi-1))) \\ & - \frac{1}{(\xi+1)^2}\ ((\xi+1)\,\pi\,\cos(\pi(\xi+1)) - \sin(\pi(\xi+1))) \\ = {} & \frac{4\xi\sin(\pi\xi) - 2\pi\,(\xi^2-1)\cos(\pi\xi)}{(\xi^2-1)^2}\,. \end{aligned}$$

36 Compito di Analisi Matematica II del 17/12/12

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione D.M. 270 (5 esercizi)
C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi D.M. 509 (primi 4 esercizi)

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x$$

nell'insieme $K = \{(x, y);\ x^2 - 2xy + y^4 \leq 0\,\}$.

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_E \frac{xy^2}{x^2 + y^2}\, dxdy\,,$$

dove E è l'insieme

$$E = \left\{(x, y);\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ y \geq x\,\right\}\,.$$

4. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica Σ individuata da

$$\Sigma = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z^2 \geq 2(x^2 + y^2),\ z \geq 0\,\}\,.$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione f, precisando prima le proprietà di f e di $\hat{f}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$$

Soluzione del compito del 17/12/12

1. L'equazione è lineare non omogenea con termine noto di tipo particolare. Studiamo prima l'equazione omogenea.
   L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, le cui soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i,$$

   allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(x) = c_1 \, \mathrm{e}^{-2x} \cos x + c_2 \, \mathrm{e}^{-2x} \sin x.$$

   Poiché il termine noto $\sin x$ non è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = A\cos x + B \sin x$. Calcolando le derivate di $\bar{y}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) =& (-A \sin x + B \cos x) \\ \bar{y}''(x) =& (-A \cos x - B \sin x) \, . \end{aligned}$$

   Sostituendo nell'equazione, troviamo:

$$\begin{aligned} -A\cos x - B\sin x + 4(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B \sin x) &= \sin x \, , \\ (-A + 4B + 5A)\cos x + (-B - 4A + 5B)\sin x &= \sin x \, , \\ (4B + 4A)\cos x + (4B - 4A)\sin x &= \sin x \, . \end{aligned}$$

   Uguagliando i coefficienti dei termini simili e risolvendo il sistema lineare otteniamo: $A = -1/8$, $B = 1/8$. Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è:

$$y(x) = c_1 \, \mathrm{e}^{-2x} \cos x + c_2 \, \mathrm{e}^{-2x} \sin x - \frac{1}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x \, .$$

   Imponendo le condizioni iniziali troviamo $c_1 = 1/8$ e $c_2 = 1/8$, da cui la soluzione:

$$y(x) = \frac{1}{8} \left(\mathrm{e}^{-2x} \cos x + \mathrm{e}^{-2x} \sin x - \cos x + \sin x \right) .$$

2. Il dominio K è chiuso. Per ottenere che è limitato osserviamo che deve valere

$$x^2 - 2xy + y^4 = x^2 - 2xy + y^2 - y^2 + y^4 = (x-y)^2 + y^2(y^2 - 1) \leq 0 \, .$$

Per avere soluzioni si deve avere $|y| \leq 1$, ma allora anche $|x|$ deve essere limitata. La funzione $f(x,y) = x$ è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f su K.
Poiché $\nabla f(x,y) = (1,0)$ la funzione non ha punti stazionari interni. Per cercare i punti stazionari sulla frontiera usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,y,\lambda) = x - \lambda(x^2 - 2xy + y^4)$ e troviamo i punti stazionari vincolati risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 - \lambda(2x - 2y) = 0 \\ \lambda(-2x + 4y^3) = 0 \\ x^2 - 2xy + y^4 = 0\,. \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ non ci sono soluzioni. Allora dalla seconda equazione otteniamo $x = 2y^3$ e dalla terza

$$4y^6 - 4y^4 + y^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^4(4y^2 - 3) = 0\,.$$

Dunque i punti stazionari sono

$$(0,0)\,, \qquad \left(\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

e quindi

$$\max_K f = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad \min_K f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\,.$$

3. Usando le coordinate polari, otteniamo che $1 \leq \varrho^2 \leq 4$ e $\sin\vartheta \geq \cos\vartheta$, perciò il dominio è dato da $1 \leq \varrho \leq 2$ e $\pi/4 \leq \vartheta \leq 5\pi/4$. Allora

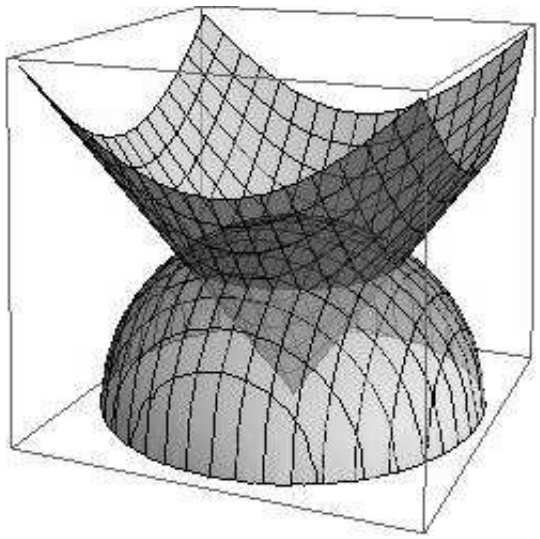
$$\begin{aligned} \iint_E \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\vartheta \int_1^2 \cos\vartheta\, \sin^2\vartheta\, \varrho^2\, d\varrho \\ &= \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 = -2\frac{2\sqrt{2}}{24}\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{18}\,. \end{aligned}$$

4. La superficie è cartesiana in quanto $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Considerando l'intersezione tra il cono e la sfera otteniamo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z^2 = 2(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 3(x^2 + y^2) = 1\,.$$

Dunque il dominio che dobbiamo considerare è $x^2 + y^2 \leq 1/3$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\, dxdy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dxdy\,.$$



Usando le coordinate polari, otteniamo che il dominio è dato da $0 \leq \varrho \leq 1/\sqrt{3}$ e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, pertanto

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Sigma) &= \int_\Sigma 1\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, \varrho\, d\varrho \\ &= 2\pi \left[-\sqrt{1-\varrho^2}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\,.\end{aligned}$$

5. La funzione f è definita in $\mathbb{R}$ e $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Calcoliamo $\hat{f}$ usando le regole di trasformazione. Osserviamo che

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+2} = \frac{x}{(x+1)^2+1} = x\, h(x)\,,$$

dove

$$h(x) = g(x+1) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Sappiamo che

$$\hat{g}(\xi) = \pi\ \mathrm{e}^{-|\xi|} \quad \Longrightarrow \quad \hat{h}(\xi) = \pi\ \mathrm{e}^{i\xi - |\xi|}\ .$$

Per la regola sulla trasformata di $x\,h(x)$ otteniamo ($\mathrm{sgn}(\xi)$ denota la funzione segno)

$$\hat{f}(\xi) = i\,(\hat{h}(\xi))' = i(i - \mathrm{sgn}(\xi))\pi\ \mathrm{e}^{i\xi - |\xi|} = -(1 + i\,\mathrm{sgn}(\xi))\pi\ \mathrm{e}^{i\xi - |\xi|}\ .$$

37 Compito di Analisi Matematica II del 14/01/13

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y = y^2 \cos x \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

2. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 y$$

nell'insieme $K = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_E \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}\, dxdy \,,$$

dove E è l'insieme

$$E = \left\{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 4 \,,\ y \geq 0\right\} \,.$$

4. Determinare la serie di Fourier di soli coseni della funzione definita per $x \in [0, 1]$ da

$$f(x) = 1 - x \,,$$

precisandone le proprietà di convergenza.

Soluzione del compito del 14/01/13

1. L'equazione $y'+y=y^2\cos x$ è di Bernoulli con $\alpha=2$ e possiamo risolverla con la sostituzione $w=y^{1-2}=y^{-1}$ e dunque $w'=-y^{-2}y'$. Dividendo l'equazione per y^2 e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} -w'+w=\cos x \\ w(0)=1\,. \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} w'-w=-\cos x \\ w(0)=1\,. \end{cases}$$

L'equazione per w è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\lambda-1=0$ ha la soluzione $\lambda=1$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è $w(x)=c\,\mathrm{e}^x$. Il termine noto è di tipo particolare. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\overline{w}(x)=A\cos x+B\sin x$. Sostituendo nell'equazione non omogenea otteniamo

$$-A\sin x+B\cos x-A\cos x-B\sin x=(B-A)\cos x-(A+B)\sin x=-\cos x\,.$$

Dunque $A=-B$ e $2B=-1$, per cui la soluzione particolare è $\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$ e l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$w(x)=c\,\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)\,.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c=1/2$ e dunque risulta $w=\dfrac{(\mathrm{e}^x+\cos x-\sin x)}{2}$. In definitiva

$$y(x)=\frac{1}{w}=\frac{2}{\mathrm{e}^x+\cos x-\sin x}\,.$$

2. Il dominio K è chiuso e limitato, la funzione $f(x,y)=x^2y$ è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f su K. Poiché $\nabla f(x,y)=(2xy,x^2)$ i punti critici sono $(0,y)\in K$ dove la funzione vale 0. Per cercare i punti stazionari sulla frontiera usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,y,\lambda)=x^2y-\lambda(x^2+y^2-1)$ e troviamo i punti stazionari vincolati risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2xy-2\lambda x=2x(y-\lambda)=0 \\ x^2-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ oppure $y = \lambda$. Per $x = 0$ dalla terza equazione otteniamo $y = \pm 1$ e f vale 0 in questi punti. Per $y = \lambda$, dalla seconda equazione otteniamo $x^2 = 2\lambda^2$ e dalla terza

$$3\lambda^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Dunque otteniamo i punti stazionari

$$(0, y)\,, \quad (0, \pm 1) \quad \left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

e quindi

$$\max_K f = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \qquad \min_K f = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\,.$$

3. Usando le coordinate polari, otteniamo che $\varrho^2 \le 4$ e $\varrho \sin\vartheta \ge 0$, perciò il dominio è dato da $0 \le \varrho \le 2$ e $0 \le \vartheta \le \pi$. Allora

$$\begin{aligned}\iint_E \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}\, dxdy &= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^2 \cos^4\vartheta\, \sin\vartheta\, \varrho^4\, d\varrho \\ &= \left[-\frac{\cos^5\vartheta}{5}\right]_0^\pi \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^2 = \frac{2}{5}\,\frac{32}{5} = \frac{64}{25}\,.\end{aligned}$$

4. Per ottenere lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni, dobbiamo considerare il prolungamento pari f_p della funzione e dunque abbiamo $T = 2$ e $\omega = \pi$. Per la parità degli integrandi, i coefficienti di Fourier sono:

$$\begin{aligned}a_0 &= \int_{-1}^1 f_p(x)\, dx = 2\int_0^1 (1 - x)\, dx = 1, \\ a_k &= \int_{-1}^1 f_p(x)\, \cos(k\pi x)\, dx = 2\int_0^1 (1 - x)\, \cos(k\pi x)\, dx \\ &= 2\left[\frac{1}{k\pi}\,(1 - x)\, \sin(k\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi x)\, dx \\ &= \left[-\frac{2}{k^2\pi^2}\, \cos(k\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{k^2\pi^2}(-(-1)^k + 1) = \frac{2}{k^2\pi^2}(1 - (-1)^k)\,.\end{aligned}$$

Dunque la serie di Fourier è

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^2}\cos(k\pi x)\,.$$

Siccome i coefficienti di indice pari si annullano, essa si può riscrivere come

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)^2} \cos\Big((2h+1)\pi x\Big) .$$

Questa serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ poiché la funzione f_p è continua. La serie converge anche totalmente.

Parte IV
A.A. 2012/13 – Corso D.M.270

Soluzione dei compiti di Analisi Matematica II

I compiti con 5 domande sono stati assegnati per Ingegneria dell'Informazione

I compiti con 4 domande sono stati assegnati per Ingegneria Industriale

38 Compito di Analisi Matematica II del 19/02/13

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Sia $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t)\tan(t) + \sqrt[3]{y(t)} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

nell'insieme $K = \{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

3. Calcolare l'integrale triplo (volume di G)

$$\iiint_G dxdydz$$

dove $G = \{(x,y,z); 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Determinare la serie di Fourier di soli coseni, e precisarne la convergenza, per la funzione periodica (di periodo 2π) definita da

$$f(x) = -x^2 + \pi x$$

in $[0,\pi]$.

Soluzione del compito del 19/02/13

1. L'equazione $y' = 3y\tan t + \sqrt[3]{y}$ è di Bernoulli con $\alpha = 1/3$. Possiamo risolverla con la sostituzione $w = y^{1-1/3} = y^{2/3}$ e dunque $w' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y'$. Dividendo l'equazione per $y^{1/3}$ e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} \frac{3}{2}w' = 3w\tan t + 1 \\ w(0) = 1\,. \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} w' - 2w\tan t = \frac{2}{3} \\ w(0) = 1\,. \end{cases}$$

L'equazione per w è lineare a coefficienti continui. Per usare la formula risolutiva, calcoliamo:

$$A(t) = -2\int \tan t\,dt = 2\log(\cos(t)),$$

da cui

$$w(t) = \mathrm{e}^{-\log(\cos^2 t)}\left(c + \int \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\log(\cos^2 t)}\,dt\right) = \frac{1}{\cos^2 t}\left(c + \frac{2}{3}\int \cos^2 t\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t}\left(c + \frac{t + \sin t\cos t}{3}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 1$ e dunque risulta $w = \dfrac{3 + t + \sin t\cos t}{3\cos^2 t}$. In definitiva, poiché $y = w^{3/2}$, otteniamo

$$y(t) = \frac{\sqrt{(3 + t + \sin t\cos t)^3}}{3\sqrt{3}\,\cos^3 t}\,.$$

2. Il dominio K è chiuso e limitato, la funzione $f(x, y, z) = x + y + z$ è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f su K.
Poiché $\nabla f(x, y, z) = (1, 1, 1)$ non esistono punti critici liberi per f. Per cercare i punti stazionari sulla frontiera usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ e troviamo i punti stazionari vincolati risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla prime tre equazioni, per confronto, abbiamo $x = y = z$. Sostituendo nella quarta equazione otteniamo $3x^2 = 1$ e quindi $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Dunque otteniamo i punti stazionari

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

In conclusione

$$\max_K f = \sqrt{3}, \qquad \min_K f = -\sqrt{3}\,.$$

3. Usando le coordinate cilindriche, otteniamo che $\varrho^2 \le 1$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$, e $\sqrt{1-\varrho^2} \le z \le \sqrt{4-\varrho^2}$. Allora

$$\begin{aligned}\iiint_G dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_{\sqrt{1-\varrho^2}}^{\sqrt{4-\varrho^2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\varrho\sqrt{4-\varrho^2} - \varrho\sqrt{1-\varrho^2}\right) d\varrho \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(4-\varrho^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-\varrho^2)^{3/2}\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{7}{3} - \sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

4. Per ottenere lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni, dobbiamo utilizzare le formule con $b = \pi$ e quindi $\omega = \pi/b = 1$. I coefficienti sono:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (-x^2 + \pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^3}{3} + \pi\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (-x^2 + \pi x)\ \cos(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}\,(-x^2 + \pi x)\ \sin(kx)\right]_0^\pi - \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \sin(kx)(-2x + \pi)\,dx \\ &= \left[\frac{2}{k^2\pi}\ \cos(kx)(-2x + \pi)\right]_0^\pi - \frac{2}{k^2\pi}\int_0^\pi -2\cos(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{k^2}(-\cos(k\pi) - 1) = -\frac{2}{k^2}((-1)^k + 1)\,.\end{aligned}$$

Dunque la serie di soli coseni è

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k + 1}{k^2}\cos(kx)\,.$$

Siccome i coefficienti di indice dispari si annullano, essa si può riscrivere, ponendo $k = 2h$ con $h \geq 1$, come

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{h^2} \cos(2hx) \, .$$

Questa serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ poiché la funzione $f = f_p$ è continua.

39 Compito di Analisi Matematica II del 6/03/13

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = 4\cos(3t) + 9t \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Verificare se il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(y\sqrt{z}, x\sqrt{z} + z\cos y, 3z^2 + \sin y + \frac{xy}{2\sqrt{z}} \right)$$

è conservativo. In caso affermativo determinarne i potenziali.

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E \log(1 + \sqrt{x^2+y^2}) dxdy$$

dove $E = \{(x,y); 9 \leq x^2 + y^2 \leq 49, x \geq 0, x^2 - y^2 \geq 0\}$.

4. Scrivere la serie di Fourier della funzione che si ottiene prolungando per periodicità su $\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in]0, \pi] \\ -2, & x \in]-\pi, 0]. \end{cases}$$

Precisare la somma e il tipo di convergenza della serie.

Soluzione del compito del 6/03/13

1. L'equazione è lineare non omogenea con termine noto di tipo particolare. Studiamo prima l'equazione omogenea.
   L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 + 9 = 0$, le cui soluzioni sono

   $$\lambda_{1,2} = \pm 3i,$$

   allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

   $$y(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t).$$

   Poiché il termine noto è somma di due termini noti di tipo particolare e $4\cos 3t$ è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = t(A\cos(3t) + B\sin(3t)) + Ct + D$. Calcolando le derivate di $\bar{y}$ otteniamo:

   $$\begin{aligned}\bar{y}'(t) =& (A\cos(3t) + B\sin(3t)) + t(-3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)) + C\\ \bar{y}''(t) =& 2(-3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)) - t(9A\cos(3t) + 9B\sin(3t))\,.\end{aligned}$$

   Sostituendo nell'equazione, tranne i termini con le funzioni trigonometriche moltiplicate per t che si semplificano, troviamo:

   $$\begin{aligned}2(-3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)) + 9(Ct + D) &= 4\cos(3t) + 9t\,,\\ 6B\cos(3t) - 6A\sin(3t) + 9(Ct + D) &= 4\cos(3t) + 9t\,.\end{aligned}$$

   Uguagliando i coefficienti dei termini simili otteniamo: $B = 2/3,\ A = 0,\ C = 1,\ D = 0$. Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è:

   $$y(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) + \frac{2}{3}\, t\sin(3t) + t\,.$$

   Imponendo le condizioni iniziali troviamo $c_1 = 0$ e $c_2 = -1/3$, da cui la soluzione:

   $$y(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{2}{3}\, t\sin(3t) + t\,.$$

2. Il campo è definito in $A = \{\, z > 0 \,\}$, che è un aperto convesso. Risulta

   $$\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{z}\right) = \sqrt{z}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{z} + z\cos y\right) = \sqrt{z}\,,$$

   $$\frac{\partial}{\partial z}\left(y\sqrt{z}\right) = \frac{y}{2\sqrt{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(3z^2 + \sin y + \frac{xy}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{y}{2\sqrt{z}}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(x\sqrt{z}+z\cos y\right)=\frac{x}{2\sqrt{z}}+\cos y,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(3z^2+\sin y+\frac{xy}{2\sqrt{z}}\right)=\cos y+\frac{x}{2\sqrt{z}}\,.$$

Dunque il campo è irrotazionale nel convesso A dove esso è definito, pertanto è conservativo.

Per trovare il potenziale integriamo rispetto a z la terza componente del campo:

$$\int\left(3z^2+\sin y+\frac{xy}{2\sqrt{z}}\right)dz=z^3+z\sin y+xy\sqrt{z}+c(x,y)\,.$$

Derivando rispetto a y e uguagliando alla seconda componente del campo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^3+z\sin y+xy\sqrt{z}+c(x,y)\right)=z\cos y+x\sqrt{z}+c_y(x,y)=z\cos y+x\sqrt{z}$$

da cui segue $c_y=0$ e quindi $c=c(x)$. Derivando rispetto a x e uguagliando alla prima componente del campo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z^3+z\sin y+xy\sqrt{z}+c(x)\right)=y\sqrt{z}+c'(x)=y\sqrt{z}$$

da cui segue $c'=0$ e quindi c è costante e il potenziale è:

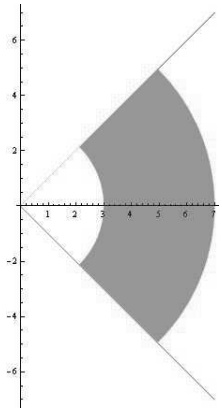
$$z^3+z\sin y+xy\sqrt{z}+c\,.$$

3. Usando le coordinate polari, otteniamo che $3\le\varrho\le 7$, $\cos\vartheta\ge 0$ e dunque $-\pi/2\le\vartheta\le\pi/2$, e infine

$$\cos^2\vartheta\ge\sin^2\vartheta\quad\Longrightarrow\quad\tan^2\vartheta\le 1\quad\Longrightarrow\quad-\frac{\pi}{4}\le\vartheta\le\frac{\pi}{4}\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\iint_E dxdy&=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}d\vartheta\int_3^7\log(1+\varrho)\varrho\,d\varrho\\
&=\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{\varrho^2}{2}\log(1+\varrho)\right]_3^7-\frac{1}{2}\int_3^7\left(\frac{\varrho^2}{1+\varrho}\right)d\varrho\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{129}{2}\log 2-\frac{1}{2}\int_3^7\left(\frac{\varrho^2+\varrho-\varrho-1+1}{1+\varrho}\right)d\varrho\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{129}{2}\log 2-\frac{1}{2}\int_3^7\left(\varrho-1+\frac{1}{1+\varrho}\right)d\varrho\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{129}{2}\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{\varrho^2}{2}-\varrho+\log(1+\varrho)\right]_3^7\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{129}{2}\log 2-\frac{1}{2}\left(\frac{49}{2}-7+3\log 2-\frac{9}{2}+3-2\log 2\right)\right)=4\pi\,(8\log 2-1)\,.
\end{aligned}$$



4. La funzione data è dispari, pertanto per la serie di Fourier dovremo calcolare solo i coefficienti b_k. Indichiamo con $\widetilde{f}$ il prolungamento così definito

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ pari} \\ -2 & \text{se } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Abbiamo $T = 2\pi$ e $\omega = 1$. I coefficienti sono:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)\,\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\,\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\,\cos(kx)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{k\pi}(1-(-1)^k)\,. \end{aligned}$$

Dunque la serie di Fourier è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k\pi}(1-(-1)^k)\sin(kx)\,.$$

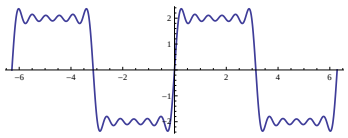


Figura 14: Somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f per $n = 12$.

Siccome i coefficienti di indice pari si annullano, essa si può riscrivere, ponendo $k = 2h+1$ con $h \geq 0$, come

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{8}{(2h+1)\pi}\,\sin((2h+1)x)\,.$$

Questa serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $\widetilde{f}$ e uniformemente negli intervalli chiusi che non contengono multipli interi di π.
La somma dei primi 12 termini della serie è riportata in Figura 14.

40 Compito di Analisi Matematica II del 23/04/13

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Risolvere il Problema di Cauchy ($t > 1$)

$$\begin{cases} y'(t) - 3y(t) = -\frac{e^{3t}}{t^2-1} \\ y(2) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_G \frac{x^2+y^2}{z^2} dxdydz$$

dove $G = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq (x^2 + y^2)z \leq 2\}$.

3. Scrivere la serie di Fourier per la funzione $|\text{sen}x|$ e precisarne il tipo di convergenza.

4. Calcolare l'area della porzione di paraboloide $z = x^2+y^2$ compresa nel cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.

Soluzione del compito del 23/04/13

1. L'equazione è lineare del primo ordine non omogenea. Per usare la formula risolutiva, calcoliamo:
$$A(t) = \int -3\,dt = -3t,$$
da cui
$$y(t) = \mathrm{e}^{3t}\left(c - \int \mathrm{e}^{-3t}\,\frac{\mathrm{e}^{3t}}{t^2-1}dt\right) = \mathrm{e}^{3t}\left(c - \int \frac{1}{t^2-1}dt\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{3t}\left(c - \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt\right) = \mathrm{e}^{3t}\left(c - \frac{1}{2}\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right).$$
Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = \mathrm{e}^{-6} - \log(3)/2$, e dunque risulta
$$y(t) = \mathrm{e}^{3t-6} - \frac{\log(3)\,\mathrm{e}^{3t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{3t}}{2}\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \mathrm{e}^{3t-6} - \mathrm{e}^{3t}\log\sqrt{\frac{3t-3}{t+1}}\,.$$

2. Usando le coordinate cilindriche, otteniamo che $0 \le \varrho \le 1$, $\cos\vartheta \ge 0$ e $\sin\vartheta \ge 0$, dunque $0 \le \vartheta \le \pi/2$, e infine $1/\varrho^2 \le z \le 2/\varrho^2$.
Allora
$$\begin{aligned}\iiint_G \frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz &= \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \varrho\,d\varrho \int_{1/\varrho^2}^{2/\varrho^2} \frac{\varrho^2}{z^2}\,dz \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[-\frac{\varrho^2}{z}\right]_{1/\varrho^2}^{2/\varrho^2} \varrho\,d\varrho = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \varrho^5\,d\varrho \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{24}\,.\end{aligned}$$

3. La funzione data è pari, π-periodica e continua. Per la serie di Fourier dovremo calcolare solo i coefficienti a_k. Abbiamo $T = \pi$ e $\omega = 2$. I coefficienti sono:
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{4}{\pi};$$

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,\cos(2kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\sin x\,\frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\,\frac{\sin(2kx)}{2k}\,dx\right) \\ &\frac{2}{\pi}\left(\left[\cos x\,\frac{\cos(2kx)}{4k^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x\,\frac{\cos(2kx)}{4k^2}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2}{4k^2} + \int_0^\pi \sin x\,\frac{\cos(2kx)}{4k^2}\,dx\right).\end{aligned}$$

Riportando al primo membro l'integrale ottenuto e dividendo per il suo coefficiente concludiamo che

$$a_k = \frac{2}{\pi}\,\frac{-2}{4k^2}\,\frac{4k^2}{4k^2-1} = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}\,.$$

Dunque la serie di Fourier è

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kx)\,.$$

La serie converge totalmente su $\mathbb{R}$.

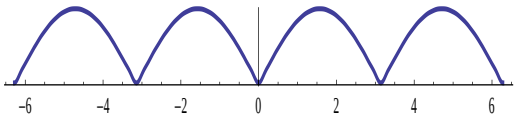


Figura 15: Somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f per $n = 12$.

La somma dei primi 12 termini della serie è riportata in Figura 15.

4. La superficie è cartesiana sul dominio $B_1 = \{\,(x,y);\ x^2+y^2 \le 1\,\}$. L'elemento d'area è dato da

$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,.$$

Allora

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{B_1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{1+4\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho\,.$$

Utilizzando il cambiamento di variabile $1+4\varrho^2 = t^2$, da cui $8\varrho d\varrho = 2tdt$, possiamo concludere

$$\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{4}\,dt = \frac{\pi}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)\,.$$

41 Compito di Analisi Matematica II dell' 1/07/13

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Risolvere, col metodo della variazione delle costanti, l'equazione differenziale

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2e^{2t}.$$

2. Trovare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = 4 - z$$

sull'intersezione del cilindro

$$x^2 + y^2 = 8$$

con il piano

$$x + y + z = 1.$$

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_G (y - x)e^{x+y} dxdydz$$

dove $G = \{(x, y, z); |y| \leq x \leq 2 - |y|, 0 \leq z \leq x + y\}$.

4. Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} x(t) = 3(t - \sin t), \\ y(t) = 3(1 - \cos t), \end{cases}$$

per $t \in [0, \pi]$.

Soluzione del compito dell' 1/07/13

1. L'equazione è lineare del secondo ordine non omogenea. Studiamo prima l'equazione omogenea.
   L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2} = 1\,, 2$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

   $$y(t) = c_1\ \mathrm{e}^t + c_2\ \mathrm{e}^{2t}\,.$$

   Usiamo il metodo di variazione delle costanti per ottenere una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il sistema è

   $$\begin{cases} c_1'(t)\ \mathrm{e}^t + c_2'(t)\ \mathrm{e}^{2t} = 0 \\ c_1'(t)\ \mathrm{e}^t + 2c_2'(t)\ \mathrm{e}^{2t} = 2\ \mathrm{e}^{2t}\,. \end{cases}$$

   Sottraendo la prima dalla seconda equazione abbiamo $c_2'(t)\ \mathrm{e}^{2t} = 2\ \mathrm{e}^{2t}$, quindi $c_2'(t) = 2$ e dunque $c_2(t) = 2t$.
   Sottraendo la prima moltiplicata per due dalla seconda equazione abbiamo $-c_1'(t)\ \mathrm{e}^t = 2\ \mathrm{e}^{2t}$, quindi $c_1'(t) = -2\ \mathrm{e}^t$ e dunque $c_1(t) = -2\ \mathrm{e}^t$. Allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

   $$-2\ \mathrm{e}^{2t} + 2t\ \mathrm{e}^{2t}$$

   e, tenuto conto dell'arbitrarietà di c_2, l'integrale generale è

   $$y(t) = c_1\ \mathrm{e}^t + c_2\ \mathrm{e}^{2t} + 2t\ \mathrm{e}^{2t}\,.$$

2. Il dominio è chiuso e limitato, la funzione $f(x, y, z) = 4 - z$ è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f sull'insieme dato.
   L'insieme non ha punti interni. Dalla seconda equazione otteniamo $z = 1 - x - y$ e, sostituendo nella funzione, dobbiamo cercare il massimo e il minimo di

   $$g(x, y) = 3 + x + y, \qquad \text{con} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

   Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x, y, \lambda) = 3 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 8)$ e troviamo i punti stazionari vincolati risolvendo il sistema:

   $$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8\,. \end{cases}$$

Dalla prime due equazioni, per confronto, abbiamo $x = y$. Sostituendo nella terza equazione otteniamo $2x^2 = 8$ e quindi $x = y = \pm 2$. Dunque otteniamo i punti stazionari per g

$$(2,2), \quad (-2,-2)\,, \quad \text{e} \quad g(2,2) = 7, \quad g(-2,-2) = -1\,.$$

In conclusione

$$\max f = 7, \qquad \min f = -1\,.$$

3. Integriamo in coordinate cartesiane.

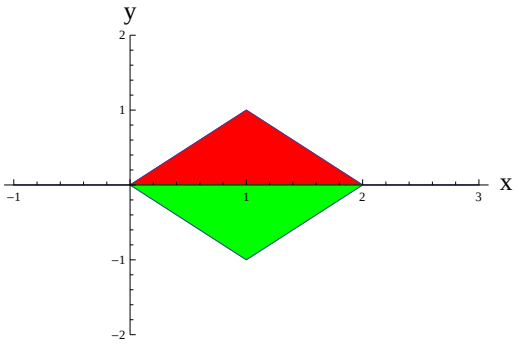


Figura 16: L'insieme $D = \{\,(x,y)\,;\,|y| \le x \le 2 - |y|\,\}$.

Dalla condizione $|y| \le 2 - |y|$ segue $-1 \le y \le 1$. Dalla definizione del valore assoluto, segue che, per $-1 \le y \le 0$ deve essere $-y \le x \le 2 + y$, mentre per $0 \le y \le 1$ deve essere $y \le x \le 2 - y$. Infine notiamo che, siccome $|y| \le x$, allora $x + y \ge 0$. In definitiva:

$$\begin{aligned}
&\iiint_G (y-x)\,\mathrm{e}^{x+y}\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{x+y} (y-x)\,\mathrm{e}^{x+y}\,dz \\
&= \int_0^1 dy \int_y^{2-y} dx \int_0^{x+y} (y-x)\,\mathrm{e}^{x+y}\,dz + \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^{2+y} dx \int_0^{x+y} (y-x)\,\mathrm{e}^{x+y}\,dz \\
&= \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (y^2 - x^2)\,\mathrm{e}^{x+y}\,dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^{2+y} (y^2 - x^2)\,\mathrm{e}^{x+y}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{x+y}\,dx = x^2\,\mathrm{e}^{x+y} - \int 2x\,\mathrm{e}^{x+y}\,dx = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^{x+y}$$

e dunque l'integrale diventa

$$\int_0^1 \left[(y^2-x^2+2x-2)\,\mathrm{e}^{x+y}\right]_y^{2-y} dy + \int_{-1}^0 \left[(y^2-x^2+2x-2)\,\mathrm{e}^{x+y}\right]_{-y}^{2+y} dy$$
$$= \int_0^1 (2y-2)(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{2y})\,dy + \int_{-1}^0 (-2y-2)(\mathrm{e}^{2+2y}-1)\,dy$$
$$= \left[(y^2-2y)\,\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{2y}-y\,\mathrm{e}^{2y}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2y}\right]_0^1 + \left[-y\,\mathrm{e}^{2+2y}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2+2y}+y^2+2y-\mathrm{e}^{2+2y}\right]_{-1}^0$$
$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2+\frac{1}{2} = -\,\mathrm{e}^2-1\,.$$

4. La lunghezza della curva è data dall'integrale della norma del vettore velocità, cioè

$$\int_0^\pi \sqrt{9(1-\cos t)^2+9\sin^2 t}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{9-18\cos t+9\cos^2 t+9\sin^2 t}\,dt$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{18-18\cos t}\,dt = 3\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt.$$

L'integrale si può calcolare in vari modi. Ad esempio, posto $1-\cos t = z$, ricaviamo $\cos t = 1-z$, da cui $t = \arccos(1-z)$. Dalla formula di cambiamento di variabile segue

$$\int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt = \int_0^2 \sqrt{z}\,\frac{dz}{\sqrt{1-(1-z)^2}} = \int_0^2 \sqrt{z}\,\frac{dz}{\sqrt{2z-z^2}}$$
$$= \int_0^2 \frac{dz}{\sqrt{2-z}} = \left[-2\sqrt{2-z}\right]_0^2 = 2\sqrt{2}\,.$$

In definitiva la lunghezza della curva è 12. In alternativa, usando la formula di bisezione

$$\sin\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,,$$

otteniamo

$$3\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt = 3\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = 6\int_0^{\pi/2} 2\sin s\,ds = 12.$$

42 Compito di Analisi Matematica II del 17/07/13

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando su $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0 \\ \sin x & \text{se} \quad 0 < x \leq \pi. \end{cases}.$$

   Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di f e precisarne il tipo di convergenza.

2. Calcolare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

   in $[0, 1] \times [0, \pi]$.

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E \frac{x + 2y}{x^2 + y^2} \, dxdy$$

   dove

$$E = \left\{(x, y);\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3,\ y \geq 0\right\}.$$

4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(t) = -\frac{2}{t} y(t) - y^2(t) \frac{\log t}{t} \quad (t > 0).$$

Soluzione del compito del 17/07/13

1. La funzione data non è pari né dispari. Essa è 2π-periodica e continua. Per la serie di Fourier dovremo calcolare i coefficienti a_k e b_k. Abbiamo $T = 2\pi$ e $\omega = 1$. Considerato che la funzione vale 0 tra $-\pi$ e 0, i coefficienti sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{2}{\pi};$$

integrando due volte per parti abbiamo:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\, \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[\sin x\, \frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\, \frac{\sin(kx)}{k}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\cos x\, \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x\, \frac{\cos(kx)}{k^2}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}-1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\int_0^\pi \sin x\, \cos(kx)\, dx\right). \end{aligned}$$

Per $k = 1$ questa formula è inutile e risulta

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\, \cos x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin 2x\, dx = 0\,.$$

Per $k > 1$, riportando al primo membro l'integrale ottenuto e dividendo per il suo coefficiente, concludiamo che

$$a_k = \frac{k^2}{k^2-1}\,\frac{(-1)^{k+1}-1}{k^2} = \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^2-1}\,.$$

Per i coefficienti b_k abbiamo

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\, \sin(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\sin x\, \frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, \frac{\cos(kx)}{k}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\cos x\, \frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x\, \frac{\sin(kx)}{k^2}\, dx\right) = \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\pi \sin x\, \sin(kx)\, dx\,. \end{aligned}$$

Per $k = 1$ questa formula è inutile ma questa volta risulta

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\,.$$

Per $k > 1$, poiché i due coefficienti a sinistra e a destra sono differenti concludiamo che $b_k = 0$. Dunque la serie di Fourier è

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^2-1}\cos(kx)\,.$$

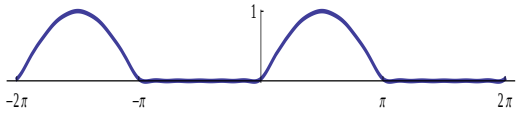


Figura 17: Somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f per $n = 10$.

La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$. La somma dei primi 10 termini della serie è riportata in Figura 17.

2. Il dominio è un rettangolo chiuso e limitato, la funzione $f(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$ è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f sull'insieme dato. Cerchiamo i punti stazionari interni studiando il sistema $\nabla f = 0$.

$$\begin{cases} f_x = \mathrm{e}^x \sin y = 0\,, \\ f_y = \mathrm{e}^x \cos y = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \sin y = 0\,, \\ \cos y = 0\,, \end{cases}$$

e questo sistema non ha soluzioni. Studiamo la funzione sui quattro lati. Per $y = 0$ e per $y = \pi$ la funzione vale zero. Per $x = 0$ la funzione diventa $\sin y$ che ha massimo pari a 1 in $\pi/2$. Per $x = 1$ la funzione diventa $f(1, y) = \mathrm{e} \sin y$ che ha massimo pari a e in $\pi/2$. Nei quattro vertici la funzione vale 0. In conclusione

$$\max f = \mathrm{e}, \qquad \min f = 0\,.$$

3. Integriamo in coordinate polari. Dalla condizione $y \geq 0$ segue $0 \leq \vartheta \leq \pi$ e poi $1 \leq \varrho \leq \sqrt{3}$. In definitiva:

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}\, dxdy &= \int_0^\pi d\vartheta \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\varrho \cos\vartheta + 2\varrho \sin\vartheta}{\varrho^2}\, \varrho d\varrho \\ &= (\sqrt{3} - 1) \int_0^\pi (\cos\vartheta + 2 \sin\vartheta)\, d\vartheta = 4\,(\sqrt{3} - 1)\,. \end{aligned}$$

4. L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = 2$. Possiamo risolverla con la sostituzione $w = y^{1-2} = y^{-1}$ e dunque $w' = -y^{-2} y'$. Dividendo l'equazione per y^2 e sostituendo otteniamo

$$-w' = -\frac{2}{t}\, w - \frac{\log t}{t} \qquad \text{ossia} \qquad w' - \frac{2}{t}\, w = \frac{\log t}{t}\,.$$

L'equazione per w è lineare a coefficienti continui. Per usare la formula risolutiva, calcoliamo:

$$A(t) = -2 \int \frac{1}{t}\, dt = -2 \log t,$$

da cui

$$w(t) = \mathrm{e}^{\log t^2} \left(c + \int \mathrm{e}^{-\log t^2} \, \frac{\log t}{t} \, dt \right) = t^2 \, \left(c + \int \frac{\log t}{t^3} \, dt \right)$$

Calcoliamo per parti l'integrale:

$$\int \frac{\log t}{t^3} \, dt = -\frac{1}{2} \frac{\log t}{t^2} + \int \frac{1}{2t^3} \, dt = -\frac{1}{2} \frac{\log t}{t^2} - \frac{1}{4t^2} \, ,$$

da cui, tenendo conto che c è arbitraria:

$$w(t) = t^2 \, \left(c - \frac{1}{2} \frac{\log t}{t^2} - \frac{1}{4t^2} \right) = \frac{ct^2 - 2\log t - 1}{4} \, ,$$

e quindi l'integrale generale è

$$y(t) = \frac{4}{ct^2 - 2\log t - 1} \, .$$

43 Compito di Analisi Matematica II del 16/09/13

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = x - y$$
con il vincolo
$$\operatorname{arctg}(x^2 + y^2 - 2) = 2 - x + y.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) + 3t^2 y(t) = t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

3. Calcolare il volume del solido
$$E = \left\{(x,y,z);\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ 1 - x - y \le z \le 2 - x - y\right\}.$$

4. Calcolare l'area della porzione del cilindro di equazione
$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = 2\sin\vartheta \\ z = z \end{cases}$$
contenuta nell'insieme
$$G = \left\{(x,y,z);\ |x| \le y,\ 0 \le z \le y^2 - x^2\right\}.$$

Soluzione del compito del 16/09/13

1. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x, y, \lambda) = x - y - \lambda\big(\text{arctg}(x^2 + y^2 - 2) - 2 + x - y\big)$ e troviamo i punti stazionari vincolati risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 - \lambda\left(\dfrac{2x}{1 + (x^2 + y^2 - 2)^2} + 1\right) = 0 \\ -1 - \lambda\left(\dfrac{2y}{1 + (x^2 + y^2 - 2)^2} - 1\right) = 0 \\ \text{arctg}(x^2 + y^2 - 2) = 2 - x + y\,. \end{cases}$$

Sommando le prime due equazioni, abbiamo:

$$-2\lambda\,\frac{2x + 2y}{1 + (x^2 + y^2 - 2)^2} = -2\lambda\,\frac{2(x + y)}{1 + (x^2 + y^2 - 2)^2} = 0\,.$$

Poiché $\lambda = 0$ non è accettabile, deve essere $y = -x$. Sostituendo nella terza equazione otteniamo:

$$\text{arctg}(2x^2 - 2) = 2 - 2x\,.$$

Risolviamo l'equazione graficamente. La funzione a sinistra è pari e strettamente crescente sui numeri positivi, per $x \to +\infty$ tende a $\pi/2$. Confrontando il grafico con quello della retta $y = 2 - 2x$ (vedi Figura 18) otteniamo che l'unica soluzione è $x = 1$ e dunque l'unico punto stazionario per f sul vincolo assegnato è $(1, -1)$.

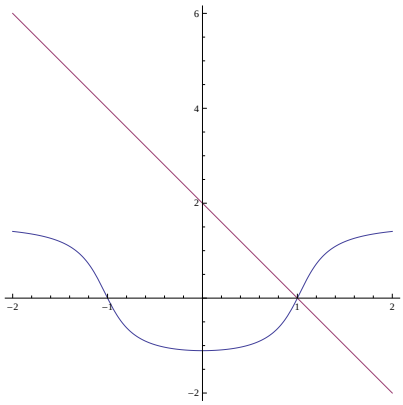


Figura 18: Grafici delle funzioni a sinistra e a destra nell'equazione.

2. L'equazione è lineare del primo ordine non omogenea. Per usare la formula risolutiva, calcoliamo:
$$A(t) = \int 3t^2\,dt = t^3,$$
da cui, calcolando un integrale quasi-immediato,
$$y(t) = \mathrm{e}^{-t^3}\left(c + \int \mathrm{e}^{t^3}\,t^2 dt\right) = \mathrm{e}^{-t^3}\left(c + \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{t^3}\,3t^2 dt\right) = \mathrm{e}^{-t^3}\left(c + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{t^3}\right).$$
Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 5/3$, e dunque risulta
$$y(t) = \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-t^3} + \frac{1}{3}\,.$$

3. Usando le coordinate cilindriche, otteniamo che $1 \le \varrho \le \sqrt{2}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$, e infine $1 - \varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta) \le z \le 2 - \varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$.
Allora
$$\begin{aligned}\iiint_E dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\sqrt{2}} \varrho\,d\varrho \int_{1-\varrho(\cos\vartheta+\sin\vartheta)}^{2-\varrho(\cos\vartheta+\sin\vartheta)} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\sqrt{2}} \varrho\,d\varrho = 2\pi\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \pi\,.\end{aligned}$$

4. La superficie è data in forma parametrica. Sostituendo l'espressione di x, y, z nelle disuguaglianze che descrivono l'insieme G, dalla prima $|x| \le y$ otteniamo $\pi/4 \le \vartheta \le 3\pi/4$ e dalla seconda $0 \le z \le 4(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta) = -4\cos(2\vartheta)$. La matrice Jacobiana è data da
$$\begin{pmatrix} -2\sin\vartheta & 0 \\ 2\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e dunque
$$A = 2\cos\vartheta\,, \quad B = 2\sin\vartheta\,, \quad C = 0\,, \qquad \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 2\,.$$
In conclusione l'area richiesta è data da
$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\vartheta \int_0^{-4\cos(2\vartheta)} 2\,dz &= 2\int_{\pi/4}^{3\pi/4} -4\cos(2\vartheta)\,d\vartheta = -8\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos(2\vartheta)\,d\vartheta \\ &= -4\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(t)\,dt = -4\Big[\sin(t)\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 8\,.\end{aligned}$$

44 Compito di Analisi Matematica II del 22/10/13

C.d.L. in Ingegneria Industriale e corsi del D.M.509

1. Stabilire se la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-kx}$$

converge totalmente in $[0, +\infty[$.

2. Determinare (se esistono) i massimi e i minimi, relativi e assoluti, in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy\,.$$

Determinare il massimo e il minimo della stessa funzione f nell'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_B (x^2 + y^2)\,dxdydz$$

dove B è l'intorno sferico di centro nell'origine e raggio 2.

4. Risolvere, col metodo della variazione delle costanti arbitrarie, l'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = \frac{1}{\sin t}.$$

Soluzione del compito del 22/10/13

1. Fissato $k \in \mathbb{N}$, poniamo $f_k(x) = x\,\mathrm{e}^{-kx}$. Dobbiamo calcolare $\sup\limits_{x\geq 0} x\,\mathrm{e}^{-kx}$. Risulta
$$f_k(0) = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-kx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{kx}} = 0\,.$$
Infine
$$f_k'(x) = \mathrm{e}^{-kx} - kx\,\mathrm{e}^{-kx} = \mathrm{e}^{-kx}(1-kx) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{1}{k} \quad\Longrightarrow\quad f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k\,\mathrm{e}}\,.$$
Allora $\sup\limits_{x\geq 0} x\,\mathrm{e}^{-kx} = \max\limits_{x\geq 0} x\,\mathrm{e}^{-kx} = \dfrac{1}{k\,\mathrm{e}}$, e la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,\mathrm{e}}$$
è divergente, perciò la serie data non converge totalmente in $[0, +\infty)$.

2. Cerchiamo i punti stazionari liberi studiando il sistema $\nabla f = 0$.
$$\begin{cases} f_x = 2x + y = 0\,, \\ f_y = 2y + x = 0\,, \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} y = -2x\,, \\ -4x + x = 0\,, \end{cases}$$
e questo sistema ha l'unica soluzione $(0,0)$. In questo punto abbiamo $f(0,0) = 0$. Dalla disuguaglianza $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ segue
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy \geq x^2 + y^2 - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2} \geq 0\,,$$
per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dunque 0 è il minimo della funzione f in $\mathbb{R}^2$. La funzione non è limitata superiormente, infatti, lungo i punti dell'asse x otteniamo
$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\,,$$
pertanto non esistono punti di massimo in $\mathbb{R}^2$.
L'insieme K è compatto, quindi, per il Teorema di Weierstrass, esistono il massimo e il minimo di f su K. Come già visto, l'unico punto punto stazionario libero è $(0,0)$, dove abbiamo $f(0,0) = 0$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per cercare i punti stazionari sulla frontiera $x^2+y^2 = 1$. Definiamo

la funzione $L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+xy-\lambda(x^2+y^2-1)$ e troviamo i punti stazionari vincolati risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 2\lambda x = 0 \\ 2y + x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le prime due equazioni e fattorizzando, abbiamo:

$$\begin{cases} (x+y)(3-2\lambda) = 0 \\ (x-y)(1-2\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad y = -x,\ \lambda = 1/2 \text{ oppure } y = x,\ \lambda = 3/2\,.$$

Allora, con $y = x$, dalla terza equazione, otteniamo:

$$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}\,.$$

Con $y = -x$, dalla terza equazione, otteniamo:

$$y = -x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\,,$$

In conclusione

$$\max_K f = \frac{3}{2}, \qquad \min_K f = 0\,.$$

3. Usando le coordinate sferiche, otteniamo che $0 \le \varrho \le 2$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$, e $0 \le \phi \le \pi$.
Allora

$$\begin{aligned} &\iiint_B (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^2 \varrho^4 \sin^3\phi\, d\varrho \\ &= 2\pi \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^2 \int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi)\sin\phi\, d\phi = \frac{64}{5}\,\pi \left[-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{64}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right)\pi = \frac{256}{15}\,\pi\,. \end{aligned}$$

4. L'equazione è lineare del secondo ordine non omogenea. Studiamo prima l'equazione omogenea.

L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 + 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2} = \pm i$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Usiamo il metodo di variazione delle costanti per ottenere una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il sistema è

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = 0 \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = \dfrac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\cos t$, la seconda equazione per $-\sin t$ e sommandole, abbiamo $c_1'(t) = -1$, quindi $c_1(t) = -t$.
Sostituendo nella prima equazione, abbiamo $-\cos t + c_2'(t) \sin t = 0$, quindi $c_2'(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$. Integrando otteniamo

$$c_2(t) = \int \frac{\cos t}{\sin t}\, dt = \log|\sin t|$$

e allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$-t \cos t + \sin t \log|\sin t|$$

e l'integrale generale è

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t \cos t + \sin t \log|\sin t|.$$

Parte V
A.A. 2013/14 – Corso D.M.270

Soluzione dei compiti di Analisi Matematica II

45 Compito di Analisi Matematica II del 16/01/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = \frac{2}{y^2} + \log(xy) + \frac{1}{x}$$

nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}.$$

2. Stabilire se il campo vettoriale definito per $y \neq 0$ da

$$\left(\frac{2x}{y}, \frac{y^2 - x^2}{y^2}\right)$$

è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne le primitive.

3. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma,$$

dove Σ è la porzione di superficie conica $z^2 = x^2 + y^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$.

4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(t) = ty(t) + t^3 y^2(t).$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-|x|} & \text{per } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione del compito del 16/01/14

1. Il dominio A è aperto e illimitato. Risolviamo il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ per trovare i punti stazionari.

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = 0\,, \\ \\ f_y = -\dfrac{4}{y^3} + \dfrac{1}{y} = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2} = 0\,, \\ \\ \dfrac{y^2-4}{y^3} = 0\,, \end{cases}$$

e questo sistema ha le due soluzioni $(1, \pm 2)$. La soluzione $(1,-2)$ non appartiene al dominio. Nel punto $(1,2)$ abbiamo $f(1,2) = \log 2 + 3/2$. Studiamo la matrice hessiana. Otteniamo

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{12}{y^4} - \dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad H(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice hessiana in $(1,2)$ è definita positiva (gli autovalori sono positivi) e quindi $(1,2)$ è un punto di minimo relativo proprio.

2. Il dominio è unione di $A_1 = \{(x,y); y > 0\}$ e $A_2 = \{(x,y); y < 0\}$, che sono due aperti convessi. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y}\right) = -\frac{2x}{y^2}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-x^2}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2}\,.$$

Dunque il campo è irrotazionale nei due insiemi convessi A_1 e A_2 dove esso è definito, pertanto è conservativo.
Per trovare i potenziali abbiamo

$$\int \left(\frac{y^2-x^2}{y^2}\right)\, dy = \int \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)\, dy = y + \frac{x^2}{y} + c(x)\,.$$

Derivando rispetto a x e uguagliando alla prima componente del campo otteniamo $c_x = 0$, e dunque i potenziali sono:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y} + c_1\varphi_{A_1} + c_2\varphi_{A_2}\,.$$

3. La superficie è cartesiana in quanto $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e abbiamo $x^2+y^2 \le 1$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari, otteniamo

$$\int_\Sigma 2(x^2+y^2)\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 2\sqrt{2}\, \varrho^3\, d\varrho = 4\pi\sqrt{2}\, \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 = \sqrt{2}\,\pi\,.$$

4. L'equazione differenziale è un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$; essa ha la soluzione stazionaria $y(t) = 0$. Per $y \neq 0$, possiamo dividere per y^2 e otteniamo $\dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{t}{y} = t^3$. Utilizziamo la sostituzione $w = y^{-1}$, da cui $w' = -y^{-2}\, y'$. Allora otteniamo l'equazione lineare:

$$-w' - tw = t^3 \quad \Longrightarrow \quad w' + tw = -t^3.$$

Per usare la formula risolutiva, calcoliamo:

$$A(t) = \int t\, dt = \frac{t^2}{2},$$

da cui

$$w(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2} \left(c - \int \mathrm{e}^{t^2/2}\, t^3\, dt \right).$$

Calcoliamo l'integrale per sostituzione. Posto $u = t^2/2$ e dunque $du = t\, dt$, abbiamo

$$\int \mathrm{e}^{t^2/2}\, t^2 t\, dt = \int 2u\, \mathrm{e}^u\, du = 2u\, \mathrm{e}^u - \int 2\, \mathrm{e}^u\, du = \mathrm{e}^u(2u-2) = \mathrm{e}^{t^2/2}(t^2-2)\,,$$

da cui ricaviamo:

$$w(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2} \left(c - \mathrm{e}^{t^2/2}(t^2-2) \right) = c\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - t^2 + 2\,.$$

Quindi l'integrale generale è

$$y(t) = \frac{1}{c\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - t^2 + 2}\,.$$

5. La funzione f è definita in $\mathbb{R}$ e $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. La funzione è reale dispari, quindi la sua trasformata è immaginaria pura e dispari. Poniamo

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|x|} & \text{per } |x| \le 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

e osserviamo che $f(x) = x\, g(x)$. La funzione g è reale pari, quindi la sua trasformata è reale e pari. Calcoliamo $\hat{g}$ usando la definizione di trasformata di Fourier.

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx.$$

Calcoliamo i due integrali:

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x(1-i\xi)}\, dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{1-i\xi} - \frac{\mathrm{e}^{-1+i\xi}}{1-i\xi} = \frac{1-\mathrm{e}^{-1+i\xi}}{1-i\xi}\,,$$
$$\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx = \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x(1+i\xi)}\, dx = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi}\right]_{0}^{1} = -\frac{\mathrm{e}^{-1-i\xi}}{1+i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{1-\mathrm{e}^{-1-i\xi}}{1+i\xi}\,.$$

Sommando e semplificando risulta

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-1+i\xi}}{1-i\xi} + \frac{1-\mathrm{e}^{-1-i\xi}}{1+i\xi} = \frac{(1-\mathrm{e}^{-1+i\xi})(1+i\xi) + (1-\mathrm{e}^{-1-i\xi})(1-i\xi)}{1+\xi^2} \\ &= \frac{1+i\xi-\mathrm{e}^{-1+i\xi}-i\xi\,\mathrm{e}^{-1+i\xi}+1-i\xi-\mathrm{e}^{-1-i\xi}+i\xi\,\mathrm{e}^{-1-i\xi}}{1+\xi^2} \\ &= \frac{2-\mathrm{e}^{-1}(2\cos\xi - 2\xi\sin\xi)}{1+\xi^2} = 2\,\frac{1-\mathrm{e}^{-1}(\cos\xi-\xi\sin\xi)}{1+\xi^2}\,. \end{aligned}$$

Per la regola sulla trasformata di $xg(x)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) = i\,(\hat{g}(\xi))' &= 2i\frac{\mathrm{e}^{-1}(\sin\xi+\sin\xi+\xi\cos\xi)(1+\xi^2) - 2\xi(1-\mathrm{e}^{-1}(\cos\xi-\xi\sin\xi))}{(1+\xi^2)^2} \\ &= 2i\frac{\mathrm{e}^{-1}(2\sin\xi+3\xi\cos\xi+\xi^3\cos\xi)-2\xi}{(1+\xi^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Compito di Analisi Matematica II del 16/01/14

C.d.L. in Ingegneria Industriale (D.M. 270)

1. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = \frac{2}{y^2} + \log(xy) + \frac{1}{x}$$

nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}.$$

2. Determinare, precisandone la convergenza, la serie di Fourier della funzione 2-periodica definita in $[-1,1]$ da $f(x) = 1 - x^2$.

3. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma,$$

dove Σ è la porzione di superficie conica $z^2 = x^2 + y^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$.

4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(t) = ty(t) + t^3 y^2(t).$$

Soluzione del compito del 16/01/14

1. 3. 4. Vedi la soluzione del compito precedente.

2. La funzione f è pari perciò dobbiamo calcolare solo i coefficienti a_k ($k \in \mathbb{N}$). Si ha $\omega = \pi$ dunque

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

e per $k > 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \cos(k\pi x)\, dx = \left[(1 - x^2)\, \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \right]_{-1}^{1} \\ &\quad + \int_{-1}^{1} 2x\, \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\, dx \\ &= -\left[2x\, \frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2\, \frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}\, dx \\ &= -4\, \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2} + \left[2\, \frac{\sin(k\pi x)}{k^3\pi^3} \right]_{-1}^{1} = 4\, \frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}\,. \end{aligned}$$

Siccome la funzione f è continua e regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ e si ha

$$f(x) = \frac{2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}\, \cos(k\pi x)\,.$$

46 Compito di Analisi Matematica II del 3/02/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{-3t} \ .$$

2. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione f definita da $f(x, y) = x^3 + y^2$ nell'insieme

$$K = \left\{ (x, y);\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x \right\} .$$

3. Calcolare il volume dell'insieme

$$G = \left\{ (x, y, z);\ z \geq x^2 + y^2 \, ,\ 1 \leq z \leq 4 \right\} .$$

4. Calcolare l'area della frontiera dell'insieme G precedente.

5. Calcolare la Trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 4x + 5} \, .$$

Soluzione del compito del 3/02/14

1. L'equazione è lineare del secondo ordine non omogenea. Studiamo prima l'equazione omogenea.
   L'equazione caratteristica è: $\lambda^2+2\lambda-3=0$, le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2}=1\,,-3$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(t)=c_1\ \mathrm{e}^{t}+c_2\ \mathrm{e}^{-3t}\,.$$

   Poiché il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea nella forma $\bar{y}(t)=At\,\mathrm{e}^{-3t}$. Calcoliamo le derivate:

$$\bar{y}'(t)=A\,\mathrm{e}^{-3t}-3At\,\mathrm{e}^{-3t}\,,\qquad \bar{y}''(t)=-6A\,\mathrm{e}^{-3t}+9At\,\mathrm{e}^{-3t}\ .$$

   Sostituendo nell'equazione non omogenea risulta:

$$-6A\,\mathrm{e}^{-3t}+9At\,\mathrm{e}^{-3t}+2A\,\mathrm{e}^{-3t}-6At\,\mathrm{e}^{-3t}-3At\,\mathrm{e}^{-3t}=-4A\,\mathrm{e}^{-3t}=\mathrm{e}^{-3t}\,,$$

   dunque $A=-1/4$ e quindi l'integrale generale è

$$y(t)=c_1\ \mathrm{e}^{t}+c_2\ \mathrm{e}^{-3t}-\frac{1}{4}\,t\,\mathrm{e}^{-3t}\,.$$

2. Il dominio K è chiuso e limitato, la funzione è continua, dunque esistono il massimo e il minimo. Risolviamo il sistema $\nabla f(x,y)=(0,0)$ per trovare i punti stazionari liberi.

$$\begin{cases} f_x=3x^2=0\,, \\ \\ f_y=2y=0\,, \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad x=0,\ y=0.$$

   In questo punto abbiamo $f(0,0)=0$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per cercare i punti stazionari sulla parte della frontiera dove $x^2+y^2=4$. Definiamo la funzione $L(x,y,\lambda)=x^3+y^2-\lambda(x^2+y^2-4)$ e troviamo i punti stazionari vincolati risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2-2\lambda x=0 \\ 2y-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=4\,. \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} x(3x-2\lambda)=0 \\ 2y(1-\lambda)=0 \\ x^2+y^2=4\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo: $y = 0$ oppure $\lambda = 1$.
Per $y = 0$, dalla terza equazione abbiamo $x = \pm 2$, ma solo il punto $(-2, 0)$ appartiene a K e $f(-2, 0) = -8$.
Per $\lambda = 1$ risulta $x = 0$ oppure $x = 2/3$. Per $x = 0$, dalla terza equazione abbiamo $y = \pm 2$, ma solo il punto $(0, 2)$ appartiene a K e $f(0, 2) = 4$. Per $x = 2/3$, dalla terza equazione abbiamo $y^2 = 4 - 4/9 = 32/9$. Dunque $y = \pm 4\sqrt{2}/3$, ma solo il punto $(2/3, 4\sqrt{2}/3)$ appartiene a K e $f(2/3, 4\sqrt{2}/3) = 104/27 \approx 3.85$.
Sulla parte della frontiera dove $y = x$, la funzione diventa $g(x) = x^3 + x^2$. La derivata è $g'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$, ed essa si annulla per $x = 0$ oppure $x = -2/3$. L'origine è già stata considerata, mentre $f(-2/3, -2/3) = 4/27 \approx 0.14$.
Infine dobbiamo considerare i punti di intersezione tra la circonferenza e la retta; risulta:

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2 \approx 4.82\,, \qquad f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 2 \approx -0.82\,.$$

In conclusione

$$\max_K f = 2\sqrt{2} + 2, \qquad \min_K f = -8\,.$$

3. Per calcolare il volume dell'insieme G è opportuno utilizzare la formula di integrazione "per strati". La sezione $G_z = \{\,(x, y);\ x^2 + y^2 \le z\,\}$ è un cerchio di raggio $\sqrt{z}$, quindi la sua misura è $\pi\, z$. Allora il volume di G è

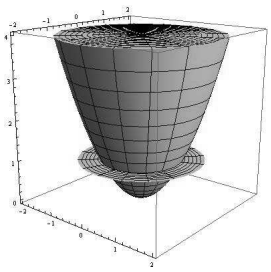
$$m(G) = \iiint_G 1\, dxdydz = \int_1^4 \pi\, z\, dz = \pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15}{2}\,\pi\,.$$

4. La superficie laterale Σ è cartesiana in quanto $z = x^2 + y^2$ e abbiamo $1 \le x^2 + y^2 \le 4$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_\Sigma 1\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^2 \sqrt{1 + 4\varrho^2}\, \varrho\, d\varrho = 2\pi\, \frac{1}{8} \int_1^2 \sqrt{1 + 4\varrho^2}\, 8\varrho\, d\varrho \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}(1 + 4\varrho^2)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{6} \left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)\,.\end{aligned}$$



La parte restante della frontiera è costituita da due cerchi rispettivamente di raggio 1 e 2 e in definitiva

$$\mathcal{A}(\partial G) = 5\pi + \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) .$$

5. La funzione f è definita in $\mathbb{R}$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$.
   Poniamo
   $$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{g}(\xi) = \pi\ \mathrm{e}^{-|\xi|} .$$
   Poniamo
   $$h(x) = \frac{1}{1+(x+2)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{h}(\xi) = \pi\ \mathrm{e}^{-|\xi|+2i\xi} .$$
   Infine $f(x) = h(x)\cos x$ per cui
   $$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{-|\xi+1|+2i(\xi+1)} + \mathrm{e}^{-|\xi-1|+2i(\xi-1)}\right) .$$

Compito di Analisi Matematica II del 3/02/14

C.d.L. in Ingegneria Industriale (D.M. 270)

1. Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{-3t} \ .$$

2. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione f definita da $f(x, y) = x^3 + y^2$ nell'insieme

$$K = \left\{ (x, y);\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x \right\} .$$

3. Scrivere la serie di Fourier di soli coseni per la funzione f definita da $f(x) = \mathrm{e}^x$ per $x \in [0, 1]$ e precisarne il tipo di convergenza.

4. Calcolare il volume dell'insieme

$$G = \left\{ (x, y, z);\ z \geq x^2 + y^2 \,,\ 1 \leq z \leq 4 \right\} .$$

Soluzione del compito del 3/02/14

1. 2. 4. Vedi la soluzione del compito precedente.

3. Per ottenere lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni, dobbiamo considerare il prolungamento pari f_p della funzione e dunque abbiamo $T = 2$ e $\omega = \pi$. Per la parità degli integrandi, i coefficienti di Fourier sono:

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx = 2(\mathrm{e}-1)\,.$$

Per $k \geq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 f(x)\,\cos(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\cos(k\pi x)\,dx \\ &= 2\left[\frac{1}{k\pi}\,\mathrm{e}^x\,\sin(k\pi x)\right]_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^x\sin(k\pi x)\,dx \\ &= \left[\frac{2}{k^2\pi^2}\,\mathrm{e}^x\cos(k\pi x)\right]_0^1 - \frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 \mathrm{e}^x\cos(k\pi x)\,dx \\ &= \frac{2}{k^2\pi^2}\left((-1)^k\,\mathrm{e}-1\right) - \frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 \mathrm{e}^x\cos(k\pi x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Riportando l'integrale al primo membro e dividendo per il coefficiente, concludiamo:

$$a_k = \frac{2}{1+k^2\pi^2}\left((-1)^k\,\mathrm{e}-1\right).$$

Dunque la serie di Fourier è

$$\mathrm{e}-1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2((-1)^k\,\mathrm{e}-1)}{1+k^2\pi^2}\cos\Big(k\pi x\Big)\,.$$

Questa serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ poiché la funzione f_p è continua. La serie converge anche totalmente.

47 Compito di Analisi Matematica II del 19/02/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(t) + 4y(t)\,\frac{\sin t}{\cos t} = \left(\sqrt[4]{y(t)}\,\sin(2t)\right)^3.$$

2. Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}, \\ z(t) = \dfrac{t^3}{3}, \end{cases}$$

con $t \in [0, 2]$.

3. Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\frac{1}{1+x^2}\right)$$

è conservativo. In caso affermativo, calcolarne un potenziale.

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_D xyz^2\,dxdydz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le x \le 1,\ -x \le z \le x,\ x + z \le y \le 4\}$.

5. Calcolare la Trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^2}.$$

I primi quattro esercizi sono stati assegnati per il C.d.L. in Ingegneria Industriale.

Soluzione del compito del 19/02/14

1. L'equazione differenziale è un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 3/4$; essa ha la soluzione stazionaria $y(t) = 0$. Per $y \neq 0$, possiamo dividere per $y^{3/4}$ e otteniamo
$$\frac{y'}{y^{3/4}} + \frac{4y(t)}{y^{3/4}} \frac{\sin t}{\cos t} = \sin^3(2t) = 8 \sin^3 t \cos^3 t.$$
Utilizziamo la sostituzione $w = y^{1-3/4} = y^{1/4}$, da cui $w' = \frac{1}{4} y^{-3/4} y'$. Allora otteniamo l'equazione lineare:
$$4w' + 4w \frac{\sin t}{\cos t} = 8 \sin^3 t \cos^3 t \quad \Longrightarrow \quad w' + w \frac{\sin t}{\cos t} = 2 \sin^3 t \cos^3 t \,.$$
Per usare la formula risolutiva, calcoliamo:
$$A(t) = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt = -\log(\cos t),$$
da cui
$$w(t) = \cos t \left(c + \int \frac{2 \sin^3 t \cos^3 t}{\cos t} \, dt \right) = \cos t \left(c + \int 2 \sin^3 t \cos^2 t \, dt \right).$$
Calcoliamo l'integrale usando l'identità $\sin^3 t = \sin t (1 - \cos^2 t)$. Allora
$$\begin{aligned} \int 2 \sin^3 t \cos^2 t \, dt &= \int 2 \sin t (1 - \cos^2 t) \cos^2 t \, dt \\ &= \int 2 \sin t (\cos^2 t - \cos^4 t) \, dt = -2 \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5} \right), \end{aligned}$$
da cui concludiamo:
$$y(t) = \cos^4 t \left(c - 2 \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5} \right) \right)^4 .$$

2. Risulta
$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{1 + (\sqrt{2}t)^2 + t^4} \, dt = \int_0^2 \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} \, dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{(1 + t^2)^2} \, dt = \int_0^2 (1 + t^2) \, dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3} \,. \end{aligned}$$

3. Il campo vettoriale F è definito su $\mathbb{R}^2$. Verifichiamo se è irrotazionale.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\,. \end{cases}$$

Il campo vettoriale F è irrotazionale e $\mathbb{R}^2$ è convesso, quindi F è conservativo. Integrando la seconda componente, otteniamo:

$$\int \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dy = -\frac{y}{1+x^2} + c(x)\,.$$

Derivando rispetto a x otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{1+x^2} + c(x)\right) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} + c'(x) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\,.$$

Dunque $c'(x) = 0$. Allora un potenziale si ha per $c(x) = 0$ e così otteniamo il potenziale

$$-\frac{y}{1+x^2}\,.$$

4. L'insieme D è normale, dunque dalla formula di riduzione otteniamo:

$$\begin{aligned} \iiint_D xyz^2\,dxdydz &= \int_0^1 x\,dx \int_{-x}^{x} z^2\,dz \int_{x+z}^{4} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx \int_{-x}^{x} z^2\left[y^2\right]_{x+z}^{4}\,dz \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx \int_{-x}^{x} z^2\left(16 - x^2 - 2xz - z^2\right)\,dz \\ &= \int_0^1 x\,dx \int_{0}^{x} z^2\left(16 - x^2 - z^2\right)\,dz = \int_0^1 x\left(16\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{15}\int_0^1 \left(80x^4 - 5x^6 - 3x^6\right)\,dx = \frac{1}{15}\left(16 - \frac{8}{7}\right) = \frac{104}{105}\,. \end{aligned}$$

5. La funzione è in $L^1(\mathbb{R})$, reale e dispari, quindi la sua trasformata è immaginaria pura e dispari. Si verifica immediatamente che la funzione $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)^2}$ è la derivata della funzione

$$g(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+4} = -\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+(x/2)^2} = -\frac{1}{8}\,h(x/2)\,,$$

dove $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Allora, usando la regola sul cambiamento di scala,

$$\hat{h}(\xi) = \pi\ \mathrm{e}^{-|\xi|} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{g}(\xi) = -\frac{\pi}{4}\ \mathrm{e}^{-|2\xi|}\ .$$

Usando la regola sulla trasformata della derivata, concludiamo

$$\hat{f}(\xi) = -\frac{\pi i \xi}{4}\ \mathrm{e}^{-|2\xi|}\ .$$

48 Compito di Analisi Matematica II del 13/06/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 8y(t) = \mathrm{e}^t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$$

nell'insieme $K = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 1\,, y \geq 0\,\}$.

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 1\,\}$.

4. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma$$

dove $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 1/\sqrt{x^2 + y^2},\ 1 \leq z \leq 2\right\}$.

5. Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$f(s) = \frac{s^2 + 1}{(s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Come compito per il C.d.L. in Ingegneria Industriale e i corsi del D.M.509 sono stati assegnati i primi 4 esercizi.

Soluzione del compito del 13/06/14

1. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata risolvendo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0\,.$$
Otteniamo le radici complesse coniugate $\lambda = 2 \pm 2i$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$y(t) = c_1\ \mathrm{e}^{2t}\cos 2t + c_2\ \mathrm{e}^{2t}\sin 2t\,.$$
Poiché il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea associata, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = A\ \mathrm{e}^t$. Sostituendo nell'equazione troviamo $A = \dfrac{1}{5}$, perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(t) = c_1\ \mathrm{e}^{2t}\cos 2t + c_2\ \mathrm{e}^{2t}\sin 2t + \frac{1}{5}\ \mathrm{e}^t\,.$$
Imponendo le condizioni iniziali, poiché
$$y'(t) = 2c_1\ \mathrm{e}^{2t}\cos 2t - 2c_1\ \mathrm{e}^{2t}\sin 2t + 2c_2\ \mathrm{e}^{2t}\sin 2t + 2c_2\ \mathrm{e}^{2t}\cos 2t + \frac{1}{5}\ \mathrm{e}^t,$$
otteniamo
$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{5} = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + \frac{1}{5} = 0\,. \end{cases}$$
Dunque la soluzione è
$$y(t) = \frac{1}{5}\left(-\,\mathrm{e}^{2t}\cos 2t + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\sin 2t + \mathrm{e}^t\right).$$

2. Il dominio K è chiuso e limitato quindi la funzione continua f ha massimo e minimo in K.
Risolviamo il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ per trovare i punti stazionari liberi.
$$\begin{cases} f_x = 2x + 4y = 0\,, \\ \\ f_y = 2y + 4x = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0,\ y = 0.$$

In questo punto abbiamo $f(0,0) = 0$.
Studiamo la funzione f sulla circonferenza unitaria. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo la funzione $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 4xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2\lambda x = 0 \\ 2y + 4x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Sommando la prima e la seconda equazione, otteniamo

$$\begin{cases} 6(x+y) - 2\lambda(x+y) = 0 \\ 2y + 4x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (x+y)(3-\lambda) = 0 \\ y + 2x - \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $y = -x$ oppure $\lambda = 3$. Per $y = -x$, dalla terza equazione segue $x = \pm 1/\sqrt{2}$ e dunque $y = \mp 1/\sqrt{2}$. Solo la coppia $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ è accettabile e risulta

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1.$$

Nel caso $\lambda = 3$, dalla seconda equazione otteniamo $y = x$. Allora dalla terza equazione segue $x = \pm 1/\sqrt{2}$ e dunque $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Solo la coppia $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ è accettabile e risulta

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.$$

Per $y = 0$ la funzione diventa $f(x, 0) = x^2$, che ha minimo in $x = 0$ con valore 0 e massimo in $x = \pm 1$ con valore 1. Confrontando i valori trovati concludiamo che

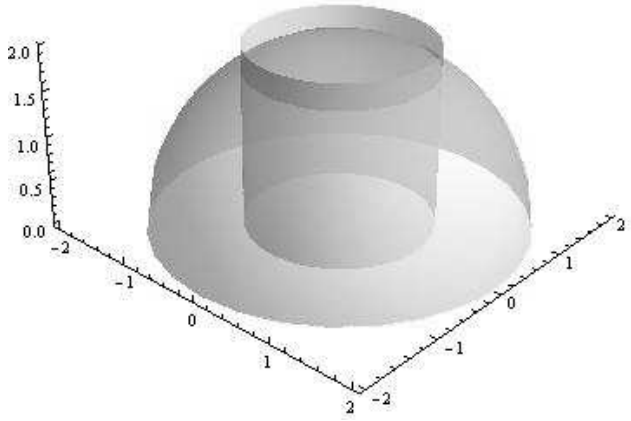
$$\max_K f = 3\,, \qquad \min_K f = -1\,.$$

3. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali abbiamo $0 \le \varrho \le 1$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $0 \le z \le \sqrt{4 - \varrho^2}$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{\sqrt{4-\varrho^2}} (\varrho^2 + z^2)\, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\varrho^2 z + \frac{z^3}{3}\right]_0^{\sqrt{4-\varrho^2}} \varrho\, d\varrho = 2\pi \int_0^1 \left(\varrho^2\sqrt{4-\varrho^2} + \frac{(4-\varrho^2)^{3/2}}{3}\right) \varrho\, d\varrho \end{aligned}$$

posto $4 - \varrho^2 = t^2$ e dunque $\varrho\, d\varrho = -t\, dt$, otteniamo

$$= -2\pi \int_2^{\sqrt{3}} \left((4 - t^2)\, t + \frac{t^3}{3} \right) t\, dt = 2\pi \left[\frac{4t^3}{3} - \frac{2t^5}{15} \right]_{\sqrt{3}}^2$$
$$= 2\pi \left(\frac{32}{3} - \frac{64}{15} - 4\sqrt{3} + \frac{6\sqrt{3}}{5} \right) = \frac{4\pi}{5} \left(16 - 7\sqrt{3} \right).$$



Il dominio d'integrazione D.

4. La superficie Σ è cartesiana in quanto $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ e abbiamo $1/2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$. Risulta:

$$z = (x^2 + y^2)^{-1/2}, \quad z_x = -(x^2 + y^2)^{-3/2} x, \quad z_y = -(x^2 + y^2)^{-3/2} y.$$

L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^3}}\, dxdy$$
$$= \sqrt{1 + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}}\, dxdy = \frac{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}}{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Usando le coordinate polari, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\,d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/2}^1 \varrho^4\,\frac{\sqrt{1+\varrho^4}}{\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho = \frac{2\pi}{4}\int_{1/2}^1 4\varrho^3\,\sqrt{1+\varrho^4}\,d\varrho \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}(1+\varrho^4)^{3/2}\right]_{1/2}^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{16}\right)^{3/2}\right) \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{17\sqrt{17}}{192}\right)\pi\,.\end{aligned}$$

5. La decomposizione in fratti semplici della funzione f è:

$$f(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{s+3}{s^2+2s+2}\,.$$

Dunque

$$f(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{2}{(s+1)^2+1}\,,$$

ed allora, utilizzando la regola sulla trasformata della funzione di Heaviside, del seno e del coseno, e la regola sulla trasformata della modulazione, si ottiene

$$F(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\cos t - 2\,\mathrm{e}^{-t}\sin t\,.$$

La funzione F si può ottenere ancora più rapidamente usando la Formula di Heaviside.

49 Compito di Analisi Matematica II del 30/06/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione

1. Risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{2t} + 2, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = \log(xy) + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2}$$

nell'insieme

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy > 0 \right\}.$$

3. Calcolare, utilizzando le coordinate cilindriche, l'integrale triplo

$$\iiint_D z\,dxdydz,$$

dove

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z \ge \frac{x^2+y^2}{3} \right\}.$$

4. Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t \cos t, \\ y(t) = \mathrm{e}^t \sin t, \end{cases}$$

dove $t \in [0, \pi]$.

5. Calcolare, con i metodi dell'analisi complessa, l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4}\,dx\,.$$

Come compito per il C.d.L. in Ingegneria Industriale e i corsi del D.M.509 sono stati assegnati i primi 4 esercizi.

Soluzione del compito del 30/06/14

1. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata risolvendo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0\,.$$
Otteniamo le due radici $\lambda = 1, 2$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$y(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{2t}\ .$$
Poiché il termine noto è la somma di una soluzione dell'equazione omogenea associata e di un termine costante che non è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = At\,\mathrm{e}^{2t} + B$. Derivando otteniamo
$$y'(t) = A\,\mathrm{e}^{2t} + 2At\,\mathrm{e}^{2t}\,, \qquad y''(t) = 4A\,\mathrm{e}^{2t} + 4At\,\mathrm{e}^{2t}\ .$$
Sostituendo nell'equazione troviamo $A = 1\,,\ B = 1$, perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{2t} + t\,\mathrm{e}^{2t} + 1.$$
Imponendo le condizioni iniziali, poiché
$$y'(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + 2c_2\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t} + 2t\ \mathrm{e}^{2t},$$
otteniamo
$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 1 = 0\,. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + 1 = 0\,. \end{cases}$$
Dunque $c_2 = -1$, $c_1 = 1$ e la soluzione è
$$y(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} + t\,\mathrm{e}^{2t} + 1\,.$$

2. Il dominio è l'aperto formato dal primo e terzo quadrante.
Risolviamo il sistema $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ per trovare i punti stazionari liberi.
$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2} = 0\,, \\[2ex] f_y = \dfrac{1}{y} - \dfrac{4}{y^3} = \dfrac{y^2-4}{y^3} = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1,\ y = \pm 2.$$

La coppia $(1,-2)$ non appartiene al dominio, mentre $(1,2)$ appartiene al dominio.
Per stabilire il carattere dell'unico punto critico studiamo la matrice hessiana.

$$f_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\,, \quad f_{xy} = 0\,, \quad f_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \frac{12}{y^4}\,,$$

e dunque nel punto $(1,2)$ la matrice hessiana è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori 1 e $1/2$ sono positivi, dunque il punto $(1,2)$ è di minimo relativo.

3. Dalle disuguaglianze che definiscono il dominio otteniamo

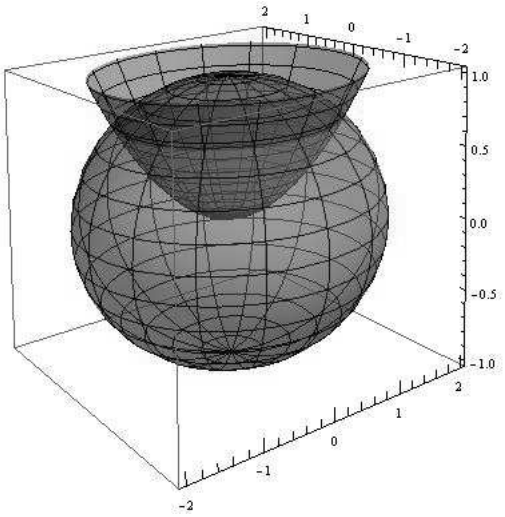
$$\frac{x^2+y^2}{3} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(x^2+y^2)^2}{9} \le 4 - x^2 - y^2\,.$$

In coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), abbiamo

$$\frac{\varrho^4}{9} \le 4 - \varrho^2 \quad \Longrightarrow \quad \varrho^4 + 9\varrho^2 - 36 \le 0\,.$$

Risolviamo la disequazione biquadratica. Posto $\varrho^2 = t$, abbiamo $t^2+9t-36 \le 0$ e quindi $-12 \le t \le 3$. In definitiva otteniamo $0 \le \varrho \le \sqrt{3}$ ed inoltre $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $\dfrac{\varrho^2}{3} \le z \le \sqrt{4-\varrho^2}$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{3}} \varrho\,d\varrho \int_{\varrho^2/3}^{\sqrt{4-\varrho^2}} z\,dz \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{\varrho^2/3}^{\sqrt{4-\varrho^2}} \varrho\,d\varrho = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4 - \varrho^2 - \frac{\varrho^4}{9}\right) \varrho\,d\varrho \\
&= \pi \left[\frac{4\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{4} - \frac{\varrho^6}{54}\right]_0^{\sqrt{3}} = \pi \left(6 - \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \pi \left(\frac{24-9-2}{4}\right) = \frac{13\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$



Il dominio d'integrazione D.

4. La lunghezza della curva è data dall'integrale della norma del vettore velocità, cioè

$$\int_0^\pi \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^\pi \sqrt{(\mathrm{e}^t(\cos t - \sin t))^2 + (\mathrm{e}^t(\sin t + \cos t))^2}\, dt$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{\mathrm{e}^{2t}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t)}\, dt = \sqrt{2} \int_0^\pi \mathrm{e}^t \, dt = \sqrt{2}\, \left[\mathrm{e}^t\right]_0^\pi = \sqrt{2}\,(\mathrm{e}^\pi - 1)\,.$$

5. Osserviamo che la funzione integranda è pari quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4}\, dx\,.$$

Per calcolare l'integrale su tutto $\mathbb{R}$, consideriamo la funzione

$$g(z) = \frac{\mathrm{e}^{2iz}}{z^2+4}$$

che ha due poli semplici in $z = \pm 2i$, e consideriamo il circuito φ_r formato dal segmento $[-r, r]$ e dalla semicirconferenza $r\,\mathrm{e}^{i\,\vartheta}$ con $0 \le \vartheta \le \pi$. All'interno del circuito (quando $r > 2$) c'è solo il punto $z = 2i$ dove

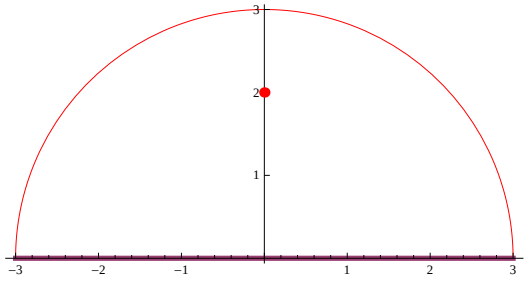
$$\mathrm{Res}(g(z), z = 2i) = \left[\frac{\mathrm{e}^{2iz}}{2z}\right]_{z=2i} = \frac{\mathrm{e}^{-4}}{4i} = -\frac{i\,\mathrm{e}^{-4}}{4}\,.$$

Per il Teorema dei residui otteniamo

$$\int_{\varphi_r} g(z)\,dz = \int_{\varphi_r} \frac{\mathrm{e}^{2iz}}{z^2+4}\,dz = -2\pi\,i\,\frac{i\,\mathrm{e}^{-4}}{4} = \pi\,\frac{\mathrm{e}^{-4}}{2}.$$

Per il Lemma di Jordan, l'integrale sulla semicirconferenza tende a zero per $r \to \infty$, quindi uguagliando le parti reali otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2iz}}{z^2+4}\,dz\right) = \pi\,\frac{\mathrm{e}^{-4}}{4}\,.$$



50 Compito di Analisi Matematica II del 21/07/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione

1. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,,$$

utilizzando il metodo di Lagrange (di variazione dei parametri).

2. Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (\,y, x+z, y\,)$$

è irrotazionale. In caso affermativo, determinarne i potenziali.

3. Calcolare massimo e minimo della funzione $f(x,y,z) = 4 - z$ sull'ellisse intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 8$ con il piano $x + y + z = 1$.

4. Calcolare, usando le coordinate cilindriche, il volume di

$$D = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\; z \ge 1 \,\right\}.$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{per } |x| \le 1, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

precisando le principali proprietà di f e di $\hat{f}$.

Come compito per il C.d.L. in Ingegneria Industriale e i corsi del D.M.509 sono stati assegnati i primi 4 esercizi.

Soluzione del compito del 21/07/14

1. L'equazione è lineare del secondo ordine non omogenea. Studiamo prima l'equazione omogenea.
   L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2} = \pm 1$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(t) = c_1\, \mathrm{e}^t + c_2\, \mathrm{e}^{-t}\,.$$

   Usiamo il metodo di variazione delle costanti per ottenere una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il sistema è

$$\begin{cases} c_1'(t)\, \mathrm{e}^t + c_2'(t)\, \mathrm{e}^{-t} = 0 \\ c_1'(t)\, \mathrm{e}^t - c_2'(t)\, \mathrm{e}^{-t} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t} \end{cases}$$

   Sottraendo la seconda dalla prima equazione abbiamo $2c_2'(t)\, \mathrm{e}^{-t} = -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$, quindi dobbiamo risolvere

$$c_2'(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{2(1+\mathrm{e}^t)} \quad \Longrightarrow \quad c_2(t) = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)}\, dt = -\frac{1}{2}\, \log(1+\mathrm{e}^t).$$

   Sommando la prima e la seconda equazione abbiamo $2c_1'(t)\, \mathrm{e}^t = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$, quindi dobbiamo risolvere

$$c_1'(t) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)} \quad \Longrightarrow \quad c_1(t) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)}\, dt.$$

   Usando la sostituzione $\mathrm{e}^t = s$, cioè $t = \log s$, calcoliamo con il metodo dei fratti semplici

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{s^2(1+s)}\, ds = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1+s)}\right) ds \\ &= \frac{1}{2}\left(-\log s - \frac{1}{s} + \log\,(1+s)\right) = \frac{1}{2}\left(-t - \mathrm{e}^{-t} + \log\,(1+\mathrm{e}^t)\right). \end{aligned}$$

   In definitiva, l'integrale generale è

$$y(t) = c_1\, \mathrm{e}^t + c_2\, \mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left(-t - \mathrm{e}^{-t} + \log\,(1+\mathrm{e}^t)\right) - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\, \log(1+\mathrm{e}^t).$$

2. Il campo F è definito su tutto $\mathbb{R}^3$, quindi se è irrotazionale è anche conservativo. Risulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x},\\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x},\\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 1 = \frac{\partial F_3}{\partial y},\end{aligned}$$

dunque il campo è irrotazionale. Calcoliamo le primitive, integrando la seconda componente rispetto a y

$$\int (x+z)\,dy = xy + zy + c(x,z).$$

Derivando la funzione ottenuta rispetto a x e a z e uguagliando alla prima e alla terza componente del campo otteniamo che c deve essere costante. Dunque i potenziali sono $f(x,y,z) = xy + zy + c$.

3. L'ellisse $K = \{(x,y,z);\ x^2+y^2 = 8,\ x+y+z = 1\}$ è un insieme chiuso e limitato quindi la funzione continua f ha massimo e minimo in K.
Dalla seconda equazione ricaviamo $z = 1-x-y$. Sostituendo nella funzione f e nella prima equazione, ne segue che dobbiamo cercare il massimo e il minimo della funzione $g(x,y) = 3+x+y$ con il vincolo $x^2+y^2 = 8$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo la funzione $L(x,y,\lambda) = 3+x+y-\lambda(x^2+y^2-8)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1-2\lambda x = 0\\ 1-2\lambda y = 0\\ x^2+y^2 = 8\,. \end{cases}$$

Confrontando la prima e la seconda equazione, otteniamo che $x = y$ ed allora dalla terza equazione otteniamo $x = \pm 2$ e dunque $y = \pm 2$. In questi due punti risulta

$$g\,(2,2) = 7, \quad g\,(-2,-2) = -1\,.$$

In conclusione abbiamo

$$\max_K f = 7\,, \qquad \min_K f = -1\,.$$

4. Dalle disuguaglianze che definiscono il dominio otteniamo $1 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$. In coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), abbiamo

$$1 \le \sqrt{4-\varrho^2} \quad \Longrightarrow \quad \varrho \le \sqrt{3}\,.$$

In definitiva otteniamo $0 \le \varrho \le \sqrt{3}$ ed inoltre $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $1 \le z \le \sqrt{4-\varrho^2}$. Allora il volume di D vale

$$\begin{aligned}\iiint_D 1\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{3}} \varrho\,d\varrho \int_1^{\sqrt{4-\varrho^2}} 1\,dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-\varrho^2}-1\right)\,\varrho\,d\varrho \\ &= 2\pi \left[-\frac{(4-\varrho^2)^{3/2}}{3} - \frac{\varrho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}\right) = \frac{5\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

5. La funzione f è reale e pari, perciò $\hat f$ è reale e pari. Poiché f è a supporto compatto, $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni k, perciò $\hat f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Calcoliamo $\hat f$ usando la definizione. Per $\xi \neq 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}\hat f(\xi) &= \int_{-1}^{1} (1-|x|)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,dx = \int_{-1}^{0} (1+x)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,dx + \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,dx \\ &= \left[(1+x)\,\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\,dx + \left[(1-x)\,\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\,dx \\ &= \frac{i}{\xi} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-\xi^2}\right]_{-1}^{0} - \frac{i}{\xi} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-\xi^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\xi^2} - \frac{\mathrm{e}^{i\xi}}{\xi^2} - \frac{\mathrm{e}^{-i\xi}}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^2} = \frac{2-2\cos\xi}{\xi^2}\,.\end{aligned}$$

Per $\xi = 0$ otteniamo

$$\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\,\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1\,.$$

51 Compito di Analisi Matematica II del 08/09/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione

1. Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine appartenenti all'insieme
$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 + xy = 4 \right\} .$$

2. Risolvere il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \mathrm{e}^{-2t} \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

3. Calcolare il seguente integrale doppio:
$$\iint_T \frac{x}{x^2 + y^2}\, dxdy\,,$$
dove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

4. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica data in forma parametrica da
$$\varphi(u, v) = (2\cos(u)\cos(v), 2\cos(u)\sin(v), 2\sin(u))\,,$$
con $\varphi : [0, \pi/4] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$.

5. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } |x| \le 1, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$
precisando le principali proprietà di f e di $\hat{f}$.

Come compito per il C.d.L. in Ingegneria Industriale e i corsi del D.M.509 sono stati assegnati i primi 4 esercizi.

Soluzione del compito del 08/09/14

1. L'ellissoide $E = \{(x, y, z);\ x^2+y^2+z^2+xy = 4\}$ è un insieme chiuso e limitato quindi la funzione continua che fornisce la distanza al quadrato dall'origine $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ha massimo e minimo in E.
Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo la funzione

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + xy - 4)$$

e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ 2y - 2\lambda y - \lambda x = 0 \\ 2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + xy = 4\,. \end{cases}$$

Dalla terza equazione $2z(1 - \lambda) = 0$ otteniamo $z = 0$ oppure $\lambda = 1$.
Nel caso $z = 0$, sommando e sottraendo la prima e la seconda equazione, otteniamo $x = y = z = 0$ che non è accettabile, altrimenti $x = -y$ oppure $x = y$. Allora dalla quarta equazione otteniamo $x = \pm 2$ e dunque $y = \mp 2$, oppure $x = y = 2/\sqrt{3}$. In questi punti risulta

$$f(\pm 2, \mp 2, 0) = 8, \qquad f\left(\pm 2/\sqrt{3}, \pm 2/\sqrt{3}, 0\right) = 8/3\,.$$

Nel caso $\lambda = 1$, otteniamo $x = y = 0$ e $z = \pm 2$, dove $f(0, 0, \pm 2) = 4$. In conclusione, indicando con d la funzione distanza dall'origine, abbiamo

$$\max_E d = 2\sqrt{2}\,, \qquad \min_E d = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

2. L'equazione è lineare del secondo ordine non omogenea.
Studiamo prima l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2+5\lambda+6 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$ pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(t) = c_1\ \mathrm{e}^{-2t} + c_2\ \mathrm{e}^{-3t}\,.$$

Poiché il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = At\ \mathrm{e}^{-2t}$. Calcoliamo le derivate:

$$\bar{y}'(t) = A\ \mathrm{e}^{-2t} - 2At\ \mathrm{e}^{-2t}\,, \qquad \bar{y}''(t) = -4A\ \mathrm{e}^{-2t} + 4At\ \mathrm{e}^{-2t}\ .$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea otteniamo

$$-4A\ \mathrm{e}^{-2t} + 5A\ \mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t} \quad \Longrightarrow \quad A = 1.$$

In definitiva, l'integrale generale è

$$y(t) = c_1\ \mathrm{e}^{-2t} + c_2\ \mathrm{e}^{-3t} + t\ \mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Imponiamo le condizioni di Cauchy: abbiamo $y(0) = c_1 + c_2 = 1\,, \quad y'(0) = -2c_1 - 3c_2 + 1 = 0\,,$ e quindi $c_1 = 2$ e $c_2 = -1\,.$ In conclusione la soluzione è $y(t) = 2\ \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} + t\ \mathrm{e}^{-2t}\,.$

3. La funzione è illimitata in un intorno dell'origine, perciò l'integrale va inteso in senso generalizzato. Dalle disuguaglianze che definiscono il dominio otteniamo $0 \le x \le 2$ e $0 \le y \le x$. Consideriamo la famiglia di compatti invadenti $T_\epsilon = \{(x,y);\ \epsilon \le x \le 2, 0 \le y \le 2 - x\}$ con $0 < \epsilon < 2$. Passeremo al limite per $\epsilon \to 0^+$. In coordinate cartesiane, abbiamo

$$\begin{aligned}
\iint_{T_\epsilon} \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_\epsilon^2 dx \int_0^{2-x} \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+(y/x)^2}\,dy = \int_\epsilon^2 \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]_\epsilon^{2-x} dx \\
&= \int_\epsilon^2 \arctan\left(\frac{2-x}{x}\right) dx = \int_\epsilon^2 \arctan\left(\frac{2}{x} - 1\right) dx \\
&= \left[x\,\arctan\left(\frac{2}{x} - 1\right)\right]_\epsilon^2 + \int_\epsilon^2 x\,\frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}\,\frac{2}{x^2}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Per $\epsilon \to 0^+$ il primo addendo tende a 0 e otteniamo

$$\begin{aligned}
\iint_T \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^2 x\,\frac{1}{1+\left(\frac{2-x}{x}\right)^2}\,\frac{2}{x^2}\,dx = \int_0^2 \frac{2x}{2x^2-4x+4}\,dx \\
&= \int_0^2 \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x-2+2}{x^2-2x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{2}{1+(x-1)^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\log(x^2-2x+2)\right]_0^2 + \left[\arctan(x-1)\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

4. Calcoliamo la matrice Jacobiana della superficie $\varphi(u,v)$:

$$\begin{pmatrix} 2\cos(u)\cos(v) \\ 2\cos(u)\sin(v) \\ 2\sin(u) \end{pmatrix} \implies D\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} -2\sin(u)\cos(v) & -2\cos(u)\sin(v) \\ -2\sin(u)\sin(v) & 2\cos(u)\cos(v) \\ 2\cos(u) & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora otteniamo:

$$A^2 = 16\cos^4(u)\cos^2(v)\,, \qquad B^2 = 16\cos^4(u)\sin^2(v)\,,$$
$$C^2 = 16\left(\sin(u)\cos(u)\cos^2(v) + \sin(u)\cos(u)\sin^2(v)\right)^2 = 16\sin^2(u)\cos^2(u)\,,$$

da cui

$$A^2 + B^2 = 16\cos^4(u), \qquad A^2 + B^2 + C^2 = 16\cos^2(u)\,.$$

Dunque $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 4\,|\cos(u)|$, e allora

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\varphi) &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi/4} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi/4} 4\,|\cos(u)|\, du \\ &= 8\pi \int_0^{\pi/4} \cos(u)\, du = 8\pi\,[\sin(u)]_0^{\pi/4} = 4\pi\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

5. La funzione f è reale e pari, perciò $\hat{f}$ è reale e pari. Poiché f è a supporto compatto, $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni k, perciò $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Se definiamo la funzione porta $p_2(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$, sappiamo che $\hat{p}_2(\xi) = 2\sin(\xi)/\xi$ (Esempio 7.3.3 degli Appunti del Corso). La funzione f assegnata si ottiene come $f(x) = x^2 p_2(x)$. Calcoliamo $\hat{f}$ usando due volte la regola di trasformazione

$$\mathcal{F}(xg(x)) = i\, D_\xi\, \hat{g}(\xi).$$

Quindi otteniamo (per $\xi \neq 0$):

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= iD_\xi\left(iD_\xi\left(2\frac{\sin(\xi)}{\xi}\right)\right) = -2D_\xi\left(\frac{\xi\cos(\xi) - \sin(\xi)}{\xi^2}\right) \\ &= -2\left(\frac{\xi^2\cos(\xi) - \xi^3\sin(\xi) - \xi^2\cos(\xi) - 2\xi(\xi\cos(\xi) - \sin(\xi))}{\xi^4}\right) \\ &= 2\,\frac{\xi^3\sin(\xi) + 2\xi(\xi\cos(\xi) - \sin(\xi))}{\xi^4} = 2\,\frac{\xi^2\sin(\xi) + 2\xi\cos(\xi) - 2\sin(\xi)}{\xi^3}\,.\end{aligned}$$

Per $\xi = 0$ abbiamo $\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$.

52 Compito di Analisi Matematica II del 22/09/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione

1. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(t) - \frac{1}{1+t}y(t) + 2(1-t^2) = 0.$$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 - z$$

su

$$E = \{x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1\}.$$

3. Calcolare l'integrale curvilineo della funzione $f(x,y) = x+y^3$ lungo il segmento che congiunge i punti $(0,0)$ e $(1,1)$.

4. Calcolare

$$\int_\Sigma (x^2+y^2)^2 d\sigma$$

dove Σ è la parte della superficie $z = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ delimitata dai piani $z = 1$ e $z = 2$.

5. Determinare (se esiste) la trasformata di Laplace inversa della funzione

$$f(s) = \frac{s+2}{s^3 - 5s^2 + 4s}\,.$$

Come compito per il C.d.L. in Ingegneria Industriale e i corsi del D.M.509 sono stati assegnati i primi 4 esercizi.

Soluzione del compito del 22/09/14

1. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Abbiamo

$$A(t) = -\int \frac{1}{1+t}\,dt = -\log(1+t)$$

e quindi l'integrale generale è

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{\log(1+t)}\left(c + \int 2(t^2-1)\,\mathrm{e}^{-\log(1+t)}\,dt\right) \\ &= (1+t)\left(c + \int 2(t^2-1)\,\frac{1}{1+t}\,dt\right) \\ &= (1+t)\left(c + 2\int (t-1)\,dt\right) = (1+t)\left(c + t^2 - 2t\right)\,. \end{aligned}$$

2. L'insieme E è un ellissoide chiuso e limitato, la funzione f è continua, dunque essa ha massimo e minimo in E.
Il gradiente di f è $\nabla f(x,y,z) = (2x, 0, -1)$ dunque non esistono punti stazionari liberi.
Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per cercare i punti stazionari sulla frontiera. Definiamo la funzione

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 - z - \lambda(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1)$$

e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -8\lambda y = 0 \\ -1 - 18\lambda z = 0 \\ x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione $y = 0$ oppure $\lambda = 0$. Dalla prima $x = 0$ oppure $\lambda = 1$. Il caso $\lambda = 0$ non è accettabile, dunque deve essere $y = 0$. Per $\lambda = 1$, otteniamo $z = -1/18$ e allora dalla quarta equazione otteniamo

$$x^2 = 1 - \frac{1}{36} \quad\Longrightarrow\quad x = \pm\frac{\sqrt{35}}{6}\,.$$

In questi punti risulta

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{35}}{6}, 0, -\frac{1}{18}\right) = \frac{35}{36} + \frac{1}{18} = \frac{37}{36}\,.$$

Nel caso $x = 0$, otteniamo $z^2 = 1/9$, e dunque $f(0, 0, 1/3) = -1/3$ e $f(0, 0, -1/3) = 1/3$. In conclusione abbiamo

$$\max_E f = \frac{37}{36}\,, \qquad \min_E f = -\frac{1}{3}\,.$$

3. Il segmento si parametrizza come $\varphi(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1]$. Allora $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}$ e l'integrale curvilineo della funzione $f(x, y)$ lungo φ vale:

$$\int_\varphi f\,ds = \int_0^1 (t + t^3)\,\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,.$$

4. Poiché la superficie $z = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ è cartesiana, l'elemento d'area è

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\,dxdy &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}}\,dxdy \\ &= \frac{\sqrt{1 + (x^2+y^2)^2}}{(x^2+y^2)}\,dxdy\,.\end{aligned}$$

Allora l'integrale da calcolare è

$$\int_D (x^2 + y^2)\,\sqrt{1 + (x^2+y^2)^2}\,dxdy\,.$$

Calcoliamo l'integrale in coordinate polari. Poiché $1 \le z = 1/\varrho \le 2$, risulta $1/2 \le \varrho \le 1$ e dunque

$$\int_D (x^2 + y^2)\,\sqrt{1 + (x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/2}^1 \varrho^2\sqrt{1 + \varrho^4}\,\varrho\,d\varrho\,.$$

Usiamo il cambiamento di variabile $t^2 = 1 + \varrho^4$, da cui $\varrho^4 = t^2 - 1$ e dunque $4\varrho^3\,d\varrho = 2t\,dt$. Allora otteniamo:

$$2\pi \int_{\sqrt{17}/4}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}t^2\,dt = \pi\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_{\sqrt{17}/4}^{\sqrt{2}} = \pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{17\sqrt{17}}{192}\right)\,.$$

5. Le radici del denominatore sono $s = 0$, $s = 1$ e $s = 4$. Utilizzando il metodo dei fratti semplici si ha

$$\begin{aligned}\frac{s+2}{s^3 - 5s^2 + 4s} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s-1} \\ &= \frac{(A+B+C)s^2 - (5A+B+4C)s + 4A}{s^3 - 5s^2 + 4s}\,.\end{aligned}$$

Dunque dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+B+4C=-1 \\ 4A=2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad A=\frac{1}{2}\,,\ B=\frac{1}{2}\,,\ C=-1\,.$$

In conclusione l'antitrasformata di f è

$$F(t)=\frac{1}{2}\,\left(\mathrm{e}^{4t}-2\,\mathrm{e}^{t}+1\right)\,H(t)\,.$$

53 Compito di Analisi Matematica II del 29/10/14

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione

1. Studiare la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{6x}{4+x^2} \right)^k .$$

2. Dopo averne discusso l'esistenza, trovare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

sull'insieme $E = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le y \le 1 \,\}$.

3. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione differenziale

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \mathrm{e}^{-t},$$

con le condizioni iniziali

$$y(0) = 1, \ y'(0) = 2.$$

4. Calcolare l'area della superficie

$$\varphi(u,v) : \begin{cases} x(u,v) = u - \sin u, \\ y(u,v) = (1-\cos u)\cos v, \\ z(u,v) = (1-\cos u)\sin v, \end{cases}$$

con $(u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

5. Calcolare, con i metodi dell'analisi complessa, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx \,.$$

Come compito per il C.d.L. in Ingegneria Industriale e i corsi del D.M.509 sono stati assegnati i primi 4 esercizi.

Soluzione del compito del 29/10/14

1. La serie si riconduce ad una serie di potenze con la sostituzione $y = \dfrac{6x}{4+x^2}$. In questo modo otteniamo la serie geometrica, che ha raggio di convergenza $\varrho = 1$ e per cui
$$\sum_{h=0}^{\infty} y^h = \frac{1}{1-y} \qquad |y| < 1\,,$$
con convergenza assoluta in $(-1,1)$ e totale in $(-r,r)$ con $0 < r < 1$. Ritorniamo nella variabile x. Osserviamo che la funzione $\left|\frac{6x}{4+x^2}\right|$ è pari, dunque basta considerare il caso $x \geq 0$. Risolviamo il sistema
$$\begin{cases} \dfrac{6x}{4+x^2} < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+4}{4+x^2} > 0 \\ x \geq 0\,. \end{cases}$$
Poiché il denominatore è positivo e le radici del numeratore sono $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$, otteniamo
$$x \in [0, 3-\sqrt{5}) \cup (3+\sqrt{5}, +\infty)\,.$$
Tenendo conto della simmetria, concludiamo che la serie data converge assolutamente in $(-\infty, -3-\sqrt{5}) \cup (-3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}) \cup (3+\sqrt{5}, +\infty)$ e converge totalmente in $(-\infty, -b] \cup [-a, a] \cup [b, +\infty)$ con $0 < a < 3-\sqrt{5}$ e $b > 3+\sqrt{5}$. La somma della serie vale $\dfrac{x^2+4}{x^2-6x+4}$.

2. L'insieme E è il triangolo chiuso e limitato con vertici in $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, la funzione f è continua, dunque essa ha massimo e minimo in E.
La funzione nei vertici vale $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 2$ e $f(1,1) = 2$.
Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (2x-y, 4y-x)$ dunque l'unico punto stazionario è l'origine che è già stata considerata.
Studiamo la funzione sulla frontiera. Su $x = 0$ otteniamo la funzione $g(y) = 2y^2$ che ha derivata nulla solo in $y = 0$. Analogamente su $y = 1$ otteniamo la funzione $g(x) = x^2 - x + 2$ che ha derivata nulla solo in $x = 1/2$, e $f(1/2, 1) = 7/4$. Infine su $y = x$ otteniamo la funzione $g(x) = 2x^2$ che ha derivata nulla solo in $x = 0$. In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo
$$\max_E f = 2\,, \qquad \min_E f = 0\,.$$

3. L'equazione è lineare del secondo ordine non omogenea. Studiamo prima l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, le cui

soluzioni sono $\lambda_1 = -1 + 2i$ e $\lambda_2 = -1 - 2i$ pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(t) = c_1 \, \mathrm{e}^{-t} \cos 2t + c_2 \, \mathrm{e}^{-t} \sin 2t.$$

Poiché il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = A \, \mathrm{e}^{-t}$. Calcoliamo le derivate:

$$\bar{y}'(t) = -A \, \mathrm{e}^{-t} \,, \qquad \bar{y}''(t) = A \, \mathrm{e}^{-t} \,.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea otteniamo

$$A \, \mathrm{e}^{-t} - 2A \, \mathrm{e}^{-t} + 5A \, \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{4}.$$

In definitiva, l'integrale generale è

$$y(t) = c_1 \, \mathrm{e}^{-t} \cos 2t + c_2 \, \mathrm{e}^{-t} \sin 2t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{4}.$$

Imponiamo le condizioni di Cauchy: derivando l'integrale generale abbiamo

$$y'(t) = -c_1 \, \mathrm{e}^{-t} \cos 2t - 2c_1 \, \mathrm{e}^{-t} \sin 2t - c_2 \, \mathrm{e}^{-t} \sin 2t + 2c_2 \, \mathrm{e}^{-t} \cos 2t - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{4} \,,$$

e dunque $y(0) = c_1 + \frac{1}{4} = 1 \,, \quad y'(0) = -c_1 + 2c_2 - \frac{1}{4} = 2 \,,$ e quindi $c_1 = 3/4$ e $c_2 = 3/2 \,.$ In conclusione la soluzione è

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{4} \left(3 \, \mathrm{e}^{-t} \cos 2t + 6 \, \mathrm{e}^{-t} \sin 2t + 1 \right).$$

4. Calcoliamo la matrice jacobiana di φ. Abbiamo:

$$D\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 - \cos u & 0 \\ \sin u \cos v & -(1 - \cos u) \sin v \\ \sin u \sin v & (1 - \cos u) \cos v \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} A &= \sin u \, (1 - \cos u)(\cos^2 v + \sin^2 v) = \sin u \, (1 - \cos u) \\ B &= -(1 - \cos u)^2 \cos v \\ C &= -(1 - \cos u)^2 \sin v \,. \end{aligned}$$

L'elemento d'area $\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ è

$$\begin{aligned}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} &= \sqrt{\sin^2 u\,(1-\cos u)^2 + (1-\cos u)^4 \cos^2 v + (1-\cos u)^4 \sin^2 v} \\ &= \sqrt{\sin^2 u\,(1-\cos u)^2 + (1-\cos u)^4} \\ &= \sqrt{(1-\cos u)^2(\sin^2 u + 1 + \cos^2 u - 2\cos u\,)} \\ &= \sqrt{2(1-\cos u)^3}\,.\end{aligned}$$

Allora l'integrale da calcolare (sfruttando la proprietà di simmetria di $\cos u$ rispetto all'asse $u = \pi$) è

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos u)^3}\, du = 4\pi \int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos u)^3}\, du\,.$$

Calcoliamo l'integrale usando la sostituzione $1 - \cos u = t^2$. Risulta $u = \arccos(1-t^2)$, e dunque (sostituendo e integrando per parti)

$$\begin{aligned}4\pi \int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos u)^3}\, du &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2t^6}\, \frac{2t}{\sqrt{1-(1-t^2)^2}}\, dt \\ &= 4\pi\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t^4}{\sqrt{2t^2 - t^4}}\, dt = 4\pi\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t^3}{\sqrt{2-t^2}}\, dt \\ &= 4\pi\sqrt{2} \left(\left[-2t^2\sqrt{2-t^2} \right]_0^{\sqrt{2}} + \int_0^{\sqrt{2}} 4t\sqrt{2-t^2}\, dt \right) \\ &= 4\pi\sqrt{2} \left[-\frac{4(2-t^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{64}{3}\,\pi\,.\end{aligned}$$

5. Osserviamo che la funzione integranda è continua su $\mathbb{R}$ ed infinitesima all'infinito come $1/x^2$, dunque l'integrale improprio è convergente. Per calcolare l'integrale su tutto $\mathbb{R}$, consideriamo la funzione

$$g(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

che ha quattro poli semplici nelle radici quarte di -1, cioè in $z_{1,2} = (1 \pm i)/\sqrt{2}$ e $z_{3,4} = (-1 \pm i)/\sqrt{2}$. Consideriamo il circuito φ_r formato dal segmento $[-r, r]$ e dalla semicirconferenza $r\,\mathrm{e}^{i\,\vartheta}$ con $0 \le \vartheta \le \pi$. All'interno del circuito (quando $r > 1$) ci sono solo i due punti $z_{1,3} = (\pm 1 + i)/\sqrt{2}$. Abbiamo

$$\mathrm{Res}(g(z), z = z_1) = \left[\frac{z^2}{4z^3} \right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z} \right]_{z=(1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4(1+i)/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,(1-i)}{8}\,,$$

e

$$\mathrm{Res}(g(z), z = z_3) = \left[\frac{1}{4z}\right]_{z=(-1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4(-1+i)/\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{8}\,.$$

Per il Teorema dei residui otteniamo

$$\int_{\varphi_r} g(z)\,dz = 2\pi\,i\,\left(\frac{\sqrt{2}\,(1-i)}{8} - \frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{8}\right) = 2\pi\,i\,\left(-\frac{2\sqrt{2}\,i}{8}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

L'integrale sulla semicirconferenza tende a zero per $r \to \infty$, quindi concludiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

54 Compito di Analisi Matematica II del 17/04/2015

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione

1. Dopo averne discusso l'esistenza, determinare, esplicitando il vincolo, gli estremi della funzione
$$f(x,y) = x^2 + 3y$$
soggetti al vincolo
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0.$$

2. Risolvere l'equazione differenziale
$$y'(x) + 2y(x)\tan x = (\sin 2x)y^2(x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

3. Calcolare il volume del solido S intersezione del cilindro $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ nel semispazio $z \geq 0$.

4. Calcolare
$$\int_\Sigma z^2 \, d\sigma$$
dove Σ è la porzione di superficie sferica individuata da
$$\Sigma = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,\; x^2 + y^2 \leq 1,\; z \geq 0 \,\}\,.$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione f, precisando prima le proprietà di f e di $\hat{f}$,
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Come compito per il C.d.L. in Ingegneria Industriale e i corsi del D.M.509 sono stati assegnati i primi 4 esercizi.

Soluzione del compito del 17/04/2015

1. Il vincolo è un'ellisse, dunque un insieme chiuso e limitato, la funzione f è continua, pertanto essa ha massimo e minimo nell'insieme dato.
   L'insieme è formato da soli punti di frontiera. Ricavando x^2 e sostituendo nella funzione f, otteniamo la funzione

$$g(y) = 4\left(1 - \frac{y^2}{9}\right) + 3y\,, \quad y \in [-3, 3].$$

   La derivata di g vale $g'(y) = 3 - \dfrac{8y}{9}$ che si annulla solo in $y = \dfrac{27}{8} \notin [-3, 3]$. Negli estremi dell'intervallo risulta $g(3) = 9$ e $g(-3) = -9$. In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo

$$\max f = 9\,, \qquad \min f = -9\,.$$

2. L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = 2$. Possiamo risolverla con la sostituzione $w = y^{1-2} = y^{-1}$ e dunque $w' = -y^{-2}y'$. Dividendo l'equazione per y^2 e sostituendo otteniamo

$$-w' + 2w\tan x = \sin 2x \qquad \text{ossia} \qquad w' - 2w\tan x = -\sin 2x\,.$$

   La soluzione generale dell'equazione si ottiene dalla formula

$$w = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(c - \int \mathrm{e}^{A(x)}\sin 2x\,dx\right),$$

   dove

$$A(x) = \int (-2\tan x)\,dx = 2\log(\cos x) = \log(\cos^2 x)$$

   Dunque:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\cos^2 x}\left(c - \int \cos^2 x\,\sin 2x\,dx\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(c - \int 2(\cos^3 x)\sin x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\left(c + \frac{\cos^4 x}{2}\right) = \frac{c + \cos^4 x}{2\cos^2 x}\,. \end{aligned}$$

   In definitiva

$$y(x) = w(x)^{-1} = \frac{2\cos^2 x}{c + \cos^4 x}\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

3. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali abbiamo

$$\varrho^2 - 2\varrho\cos\vartheta \le 0\,, \quad \varrho^2 + z^2 \le 4\,,$$

e dunque

$$-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 \le \varrho \le 2\cos\vartheta\,, \quad 0 \le z \le \sqrt{4-\varrho^2}\,.$$

Allora il volume vale

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \varrho\, d\varrho \int_0^{\sqrt{4-\varrho^2}} dz = 2\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \sqrt{4-\varrho^2}\,\varrho\, d\varrho \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{(4-\varrho^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{2\cos\vartheta} d\vartheta = 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{8}{3} - \frac{(4-4\cos^2\vartheta)^{3/2}}{3}\right) d\vartheta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^3\vartheta\right)\, d\vartheta = \frac{8\pi}{3} - \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \left((1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\right)\, d\vartheta \\
&= \frac{8\pi}{3} - \frac{16}{3}\left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{8\pi}{3} - \frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} - \frac{32}{9}\,.
\end{aligned}$$

4. La superficie Σ è il grafico della funzione $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$. Il dominio che dobbiamo considerare è $B_1 = \{\, x^2+y^2 \le 1 \,\}$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2-y^2} + \frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\, dxdy = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari, otteniamo che il dominio è dato da $0 \le \varrho \le 1$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$, pertanto

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma z^2\, d\sigma &= \int_{B_1} (4-x^2-y^2)\, \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 2\sqrt{4-\varrho^2}\,\varrho\, d\varrho \\
&= 4\pi \left[-\frac{1}{3}(4-\varrho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,\pi\, \left(8-3\sqrt{3}\right)\,.
\end{aligned}$$

5. Osserviamo che la funzione f è a supporto compatto, quindi $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque $\hat f \in C^\infty(\mathbb{R})$. La funzione f è reale e dispari, quindi la

trasformata è immaginaria pura e dispari. Usiamo la definizione per calcolare la trasformata. Risulta $\hat{f}(0) = 0$. Consideriamo $\xi \neq 0$ e otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,dx &= \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,dx = \left[x\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{i\xi}\,dx \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-i\xi}}{-i\xi} + \frac{\mathrm{e}^{i\xi}}{-i\xi} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-i^2\xi^2}\right]_{-1}^{1} = i\,\frac{\mathrm{e}^{-i\xi}+\mathrm{e}^{i\xi}}{\xi} + \frac{\mathrm{e}^{-i\xi}-\mathrm{e}^{i\xi}}{\xi^2} \\ &= i\,\frac{2\cos\xi}{\xi} - \frac{2i\sin\xi}{\xi^2} = 2i\left(\frac{\xi\cos\xi-\sin\xi}{\xi^2}\right)\end{aligned}$$

In alternativa, con riferimento all'Esempio 7.3.3 nelle dispense e utilizzando la regola per la trasformata di $xu(x)$, si ottiene immediatamente il risultato.

Parte VI
A.A. 2015/16 – Corso D.M.270

Soluzione dei compiti di Analisi Matematica II

55 Compito di Analisi Matematica II del 25/01/16

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Dopo averne discusso l'esistenza, determinare gli estremi della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$$

nell'insieme

$$E = \{\,(x,y)\,;\, 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le 2 - x\,\}.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = (y')^2 - y'(y-1)\,, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 2\,. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_K (x^2 + y^2 + 4z^2)\, dxdydz$$

nell'insieme

$$K = \{\,(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 + 4z^2 \le 1\,\}.$$

4. Calcolare l'area della superficie individuata da

$$\Sigma = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ x^2 + 4y^2 \le 4\,\}\ .$$

5. Risolvere, mediante la trasformata di Laplace, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'' + 4Y = F(t), \\ Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 2\,, \end{cases}$$

dove

$$F(t) = \begin{cases} \sin t & \text{per } \ 0 \le t \le \pi, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione del compito del 25/01/2016

1. L'insieme è un triangolo chiuso e limitato, la funzione f è continua, quindi esistono il massimo e il minimo di f. I vertici sono $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$. Cerchiamo i punti dove il gradiente si annulla.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2y - 3x = 0\,, \end{cases} \qquad \text{l'unico punto critico è } (0,0) \quad \text{e} \quad f(0,0) = 0$$

Consideriamo il vincolo $y = 0$, sul quale $g(x) = f(x,0) = x^2$ con $0 \le x \le 2$. Il minimo è 0 e il massimo è 4.
Consideriamo il vincolo $x = 0$, sul quale $g(y) = f(0,y) = y^2$ con $0 \le y \le 2$. Il minimo è 0 e il massimo è 4.
Consideriamo il vincolo $y = 2 - x$, sul quale

$$g(x) = f(x, 2-x) = x^2 + (2-x)^2 - 3x(2-x) = 5x^2 - 10x + 4\,,$$

con $0 \le x \le 2$. Derivando otteniamo $g'(x) = 10x - 10 = 0$, e dunque $x = 1$ in cui $g(1) = f(1,1) = -1$. I vertici sono già stati considerati e dunque, confrontando i valori della funzione f nei punti ottenuti concludiamo:

$$\max_E f = f(2,0) = f(0,2) = 4\,, \qquad \min_E f = f(1,1) = -1\,,$$

2. L'equazione è autonoma. Possiamo risolverla con la sostituzione $z(y(t)) = y'(t)$ e dunque $y''(t) = z(y(t))z'(y(t))$. Assumendo y come variabile indipendente otteniamo

$$\begin{cases} z\,z' = z^2 - z\,(y-1) \\ z(2) = 2\,. \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} z' - z = -(y-1) \\ z(2) = 2\,. \end{cases}$$

Utilizziamo la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine. Risulta

$$A(y) = -\int dy = -y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-A(y)} = \mathrm{e}^{y},$$

e quindi

$$\begin{aligned} z(y) &= \mathrm{e}^{y} \left(c - \int (y-1)\,\mathrm{e}^{-y}\, dy \right) = \mathrm{e}^{y} \left(c + (y-1)\,\mathrm{e}^{-y} - \int \mathrm{e}^{-y}\, dy \right) \\ &= \mathrm{e}^{y} \left(c + (y-1)\,\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-y} \right) = c\,\mathrm{e}^{y} + y\,. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $z(2) = 2$ otteniamo $c = 0$ e dunque $y' = y$ con la condizione $y(0) = 2$. In definitiva

$$y(t) = 2\ \mathrm{e}^{t}\ .$$

3. L'insieme è di rotazione intorno all'asse z, dunque usiamo le coordinate cilindriche e integriamo per strati. Dalla disuguaglianza $x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1$ otteniamo:

$$\varrho^2 + 4z^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}\,, \quad 0 \leq \varrho \leq \sqrt{1-4z^2}\,.$$

Per ϑ segue $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. In definitiva

$$\begin{aligned}
&\iiint_K (x^2+y^2+4z^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-1/2}^{1/2} dz \int_0^{\sqrt{1-4z^2}} (\varrho^2+4z^2)\varrho\,d\varrho \\
&= 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\varrho^4}{4} + 2z^2\varrho^2\right]_0^{\sqrt{1-4z^2}} dz = 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{(1-4z^2)^2}{4} + 2z^2(1-4z^2)\right) dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \left(1 - 8z^2 + 16z^4 + 8z^2 - 32z^4\right)\,dz = \frac{\pi}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \left(1-16z^4\right)\,dz \\
&= \pi \left[z - \frac{16z^5}{5}\right]_0^{1/2} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) = \frac{2\pi}{5}\,.
\end{aligned}$$

Il calcolo è ancora più rapido usando le coordinate ellissoidali:

$$\begin{cases} x = \varrho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \frac{1}{2}\varrho\cos\varphi\,, \end{cases}$$

per cui il determinante della matrice jacobiana è $\frac{1}{2}\varrho^2 \sin\varphi$. Allora l'insieme è dato da $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varrho \leq 1$ e l'integrale risulta:

$$\begin{aligned}
&\iiint_K (x^2+y^2+4z^2)\,dxdydz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2\,\frac{1}{2}\varrho^2 \sin\varphi\,d\varrho \\
&= \pi \int_0^{\pi} \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1 \sin\varphi\,d\varphi = \frac{2\pi}{5}\,.
\end{aligned}$$

4. La superficie è cartesiana in quanto $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e abbiamo $x^2 + 4y^2 \leq 4$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari ellittiche, cioè

$$\begin{cases} x = 2\varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\sin\vartheta\,, \end{cases}$$

per le quali il determinante della matrice jacobiana è 2ϱ, otteniamo

$$\int_\Sigma 1\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{2}\,2\varrho\,d\varrho = 2\pi\sqrt{2}\,\left[\varrho^2\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\,\pi\,.$$

5. La funzione $F(t)$, utilizzando la funzione di Heaviside, si può scrivere come $F(t) = H(t)\sin t - H(t-\pi)\sin t = H(t)\sin t + H(t-\pi)\sin(t-\pi)$. Allora la sua trasformata di Laplace è

$$f(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+1} = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+1}\,.$$

Tenendo conto dei dati iniziali, la trasformata di Laplace dell'equazione fornisce:

$$s^2y(s) - 2 + 4y(s) = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+1} \quad\Longrightarrow\quad y(s) = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}+2(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}\,.$$

Determiniamo la decomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned} \frac{2s^2+3}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \\ &= \frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + 4B + D}{(s^2+1)(s^2+4)}\,, \end{aligned}$$

da cui $A = C = 0$, $B = 1/3$ e $D = 5/3$. Analogamente

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \mathrm{e}^{-\pi s}\left(\frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\pi s}\left(\frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + 4B + D}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)\,, \end{aligned}$$

da cui $A = C = 0$, $B = 1/3$ e $D = -1/3$. Pertanto dobbiamo antitrasformare la funzione

$$\frac{1}{3(s^2+1)} + \frac{5}{3(s^2+4)} + \mathrm{e}^{-\pi s}\left(\frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{1}{3(s^2+4)}\right)\,.$$

Otteniamo in definitiva

$$Y(t) = \frac{1}{3}\left(\sin t + \frac{5}{2}\sin(2t)\right) H(t) + \frac{1}{3}\left(\sin(t-\pi) - \frac{1}{2}\sin(2(t-\pi))\right) H(t-\pi)\,,$$

ossia

$$Y(t) = \frac{1}{3}\left(\sin t + \frac{5}{2}\sin(2t)\right) H(t) - \frac{1}{3}\left(\sin t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) H(t-\pi)\,.$$

56 Compito di Analisi Matematica II del 8/02/2016

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Determinare (se esistono) il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$$

nell'insieme

$$E = \{\, (x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 \le 4\,, y \ge 0\,\}.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4}{t}\, y + t\,\sqrt{y}\,, \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E (x^2 + 2y^2 + z^2)\, dxdydz$$

nella semisfera

$$E = \{\, (x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 \le 4\,, y \ge 0\,\}.$$

4. Calcolare, mediante il teorema della divergenza, il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = (xy^2, x^2y, z^2)$ uscente attraverso la superficie

$$\Sigma = \{\, x^2+y^2 = 4\,,\ 0 \le z \le 2\,\} \cup \{\, x^2+y^2 \le 4\,,\ z = 0 \text{ o } z = 2\,\}.$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f seguente, precisando prima le proprietà di f e di $\hat{f}$,

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{x^2 + 2x + 10}$$

Soluzione del compito del 8/02/16

1. Il dominio E è chiuso e limitato, la funzione f è continua, dunque ha massimo e minimo in E per il Teorema di Weierstrass. Cerchiamo i punti critici liberi risolvendo $\nabla f = (0,0,0)$. Risulta

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, -6z)$$

dunque l'unico punto critico libero è $(0,0,0)$ dove f vale zero. Studiamo ora il comportamento sulla semisfera usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(x^2+y^2+z^2-4)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ 6z - 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(2-\lambda) = 0 \\ 2z(3-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $2x(1-\lambda) = 0$. Per $\lambda = 1$, per via della seconda e terza equazione dobbiamo avere $y = z = 0$. Allora otteniamo due punti stazionari $(\pm 2, 0, 0)$ dove f vale 4. Per $x = 0$, dalla seconda equazione segue $y = 0$ o $\lambda = 2$. Nel primo caso otteniamo i due punti stazionari $(0,0,\pm 2)$ dove f vale -12. Resta solo il caso $\lambda = 2$. Dalla terza equazione dobbiamo avere anche $z = 0$, e quindi, per via della condizione $y \geq 0$ otteniamo un solo punto stazionario $(0,2,0)$ dove f vale 8.
Studiamo ora il vincolo $y = 0$ in $x^2 + z^2 \leq 4$. Poniamo $g(x,z) = f(x,0,z) = x^2 - 3z^2$. Risulta $\nabla g(x,z) = (2x, -6z)$, per cui l'unico punto critico libero per g è $(0,0)$ dove g vale zero. Studiamo ora il comportamento sulla circonferenza $x^2 + z^2 = 4$ usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,z,\lambda) = g(x,z) - \lambda(x^2+z^2-4)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 6z - 2\lambda z = 0 \\ x^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

Come in precedenza, troviamo i punti $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$, dove g vale 4 o -12. Confrontando tutti i valori trovati concludiamo che

$$\max_E f = 8\,, \qquad \min_E f = -12\,.$$

2. L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = \frac{1}{2}$. Possiamo risolverla con la sostituzione $w = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{1/2}$ e dunque $w' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$. Dividendo l'equazione per $y^{1/2}$ e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} 2w' = \dfrac{4}{t}w + t \\ w(1) = 1\,. \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} w' - \dfrac{2}{t}w = \dfrac{t}{2} \\ w(1) = 1\,. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine si ottiene usando la formula risolutiva. Otteniamo $A(t) = \int -\frac{2}{t}\,dt = -2\log t$, e allora

$$\begin{aligned} w(t) &= \mathrm{e}^{2\log t}\left(c + \int \frac{t}{2}\ \mathrm{e}^{-2\log t}\ dt\right) = t^2\left(c + \int \frac{t}{2}\,\frac{1}{t^2}\,dt\right) \\ &= t^2\left(c + \int \frac{1}{2t}\,dt\right) = t^2\left(c + \frac{1}{2}\log t\right)\,. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $w(1) = 1$ otteniamo $c = 1$ e dunque $w = t^2\left(1 + \frac{1}{2}\log t\right)$. In definitiva

$$y(t) = w(t)^2 = t^4\left(1 + \frac{1}{2}\log t\right)^2\,.$$

3. Utilizziamo le coordinate sferiche. La disequazione $y = \varrho\sin\varphi\sin\vartheta \geq 0$ comporta $0 \leq \vartheta \leq \pi$. L'altra disequazione fornisce $0 \leq \varrho \leq 2$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned} &\iiint_E (x^2 + 2y^2 + z^2)\,dxdydz = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2 + y^2)\,dxdydz \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^2 (\varrho^2 + \varrho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta)\varrho^2\sin\varphi\,d\varrho \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \left[\frac{\varrho^5}{5}(1 + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta)\sin\varphi\right]_0^2 d\vartheta \\ &= \frac{32}{5}\int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi (1 + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta)\sin\varphi\,d\vartheta = \frac{32}{5}\left(2\pi + \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin^3\varphi\sin^2\vartheta\,d\vartheta\right) \\ &= \frac{32}{5}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^3\varphi\,d\varphi\right) = \frac{32\pi}{5}\left(2 + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\varphi(1 - \cos^2\varphi)\,d\varphi\right) \\ &= \frac{32\pi}{5}\left(3 + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi\right) = \frac{32\pi}{5}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{256\pi}{15}\,. \end{aligned}$$

4. Possiamo usare il teorema della divergenza in quanto $\Sigma = \partial K$ con

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 \le 4\,,\ 0 \le z \le 2 \,\}\,.$$

Risulta $\operatorname{div} \mathbf{F} = y^2 + x^2 + 2z$ e allora

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \nu d\sigma = \iiint_K (y^2 + x^2 + 2z)\, dxdydz.$$

Utilizziamo le coordinate cilindriche:

$$\iiint_K (y^2 + x^2 + 2z)\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 \varrho\, d\varrho \int_0^2 (\varrho^2 + 2z)\, dz$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left[\varrho^2 z + z^2\right]_0^2 \varrho\, d\varrho = 2\pi \int_0^2 (2\varrho^3 + 4\varrho)\, d\varrho = 2\pi\,(8+8) = 32\pi\,.$$

5. Il denominatore non si annulla in $\mathbb{R}$, perciò $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre f è infinitesima all'infinito come $1/x^2$, perciò $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat f \in C^0(\mathbb{R})$ ed è infinitesima all'infinito di ordine arbitrariamente grande. Calcoliamo $\hat f$ usando le regole di trasformazione. Posto $g(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+10} = \dfrac{1}{(x+1)^2+9}$, risulta $g(x) = h(x+1)$, dove $h(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$. Inoltre $f(x) = \cos(2x)\, g(x)$. Dunque:

$$\hat h(\xi) = \frac{\pi}{3}\ \mathrm{e}^{-3|\xi|}$$
$$\hat g(\xi) = \frac{\pi}{3}\ \mathrm{e}^{-3|\xi|+i\xi}$$
$$\hat f(\xi) = \frac{\pi}{6}\ \left(\mathrm{e}^{-3|\xi-2|+i(\xi-2)} + \mathrm{e}^{-3|\xi+2|+i(\xi+2)}\right)\,.$$

57 Compito di Analisi Matematica II del 22/02/2016

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Determinare (se esistono) il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 2z$$

nell'insieme

$$E = \{\,(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\, z \ge 0\,\}.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy'' = (y')^2 - y^2y'\,, \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1\,. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

nell'insieme

$$E = \{\,(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \le z^2\,, 1 \le z \le 2\,\}.$$

4. Calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,d\sigma$$

dove $\Sigma = \{\,(x,y,z)\,;\, z = x^2-y^2\,,\ x^2+y^2 \le 1\,\}$.

5. Risolvere, mediante la trasformata di Laplace, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'' + 2Y' + 2Y = F(t), \\ Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1\,, \end{cases}$$

dove

$$F(t) = \begin{cases} t & \text{per } \ 0 \le t \le 1, \\ 2-t & \text{per } \ 1 < t \le 2, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione del compito del 22/02/16

1. Il dominio E è chiuso e limitato, la funzione f è continua, dunque ha massimo e minimo in E per il Teorema di Weierstrass. Cerchiamo i punti critici liberi risolvendo $\nabla f = (0,0,0)$. Risulta

$$\nabla f(x,y,z) = (4x, -2y, -2)$$

dunque non esistono punti critici liberi. Studiamo ora il comportamento sulla semisfera usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(x^2+y^2+z^2-4)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2\lambda x = 0 \\ -2y - 2\lambda y = 0 \\ -2 - 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x(2-\lambda) = 0 \\ 2y(1+\lambda) = 0 \\ 1 + \lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ oppure $\lambda = 2$. Per $\lambda = 2$, per via della seconda equazione dobbiamo avere $y = 0$ e $z = -1/2$, che non è accettabile. Per $x = 0$, dalla seconda equazione segue $y = 0$ o $\lambda = -1$. Nel primo caso otteniamo solo il punto stazionario $(0,0,2)$ dove f vale -4. Resta solo il caso $\lambda = -1$. Dalla terza equazione dobbiamo avere che $z = 1$, e quindi otteniamo i punti stazionari $(0, \pm\sqrt{3}, 1)$ dove f vale -5.
Studiamo ora il vincolo $z = 0$ in $x^2 + y^2 \leq 4$. Poniamo $g(x,y) = f(x,y,0) = 2x^2 - y^2$. Risulta $\nabla g(x,y) = (4x, -2y)$, per cui l'unico punto critico libero per g è $(0,0)$ dove g vale zero. Studiamo ora il comportamento sulla circonferenza $x^2 + z^2 = 4$ usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,y,\lambda) = g(x,y) - \lambda(x^2+z^2-4)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2\lambda x = 0 \\ -2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

Come in precedenza, troviamo i punti $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$, dove g vale 8 o -4. Confrontando tutti i valori trovati concludiamo che

$$\max_E f = 8\,, \qquad \min_E f = -5\,.$$

2. L'equazione è autonoma. Possiamo risolverla con la sostituzione $z(y(t)) = y'(t)$ e dunque $y''(t) = z(y(t))z'(y(t))$. Assumendo y come variabile indipendente otteniamo

$$\begin{cases} y\,z\,z' = z^2 - y^2\,z \\ z(1) = -1\,. \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} z' - \dfrac{z}{y} = -y \\ z(1) = -1\,. \end{cases}$$

Utilizziamo la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine. Risulta

$$A(y) = -\int \frac{1}{y} dy = -\log y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-A(y)} = y,$$

e quindi

$$\begin{aligned} z(y) &= y\,\left(c - \int 1\,dy\right) = y\,\,(c-y) \\ &= cy - y^2\,. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $z(1) = -1$ otteniamo $c = 0$ e dunque $y' = -y^2$ con la condizione $y(0) = 1$. L'equazione è a variabili separabili, e otteniamo

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int dt \quad \Longrightarrow \quad -y^{-1} = -t + c$$

da cui $y = \frac{1}{t+c}$. Imponendo la condizione iniziale, abbiamo $c = 1$. In definitiva

$$y(t) = \frac{1}{t+1}\,.$$

3. Utilizziamo le coordinate cilindriche. Otteniamo $1 \le z \le 2$ e quindi $0 \le \varrho \le z$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned} &\iiint_E \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^2 dz \int_0^z \frac{z}{\varrho^2+z^2}\,\varrho\,d\varrho \\ &= 2\pi \int_1^2 \frac{1}{2}\Big[z\log(\varrho^2+z^2)\Big]_0^z dz = \pi \int_1^2 z(\log(2z^2) - \log(z^2))\,dz \\ &= \pi \int_1^2 \log(2)\,z\,dz = \frac{3\pi}{2}\,\log(2)\,. \end{aligned}$$

4. La superficie è cartesiana in quanto $z = x^2 - y^2$ con $x^2 + y^2 \le 1$. L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\,dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\,dxdy$$

pertanto, inserendo l'elemento d'area e usando le coordinate polari, otteniamo

$$\int_\Sigma (x^2+y^2)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2\,\sqrt{1+4\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho$$

usiamo la sostituzione $t^2 = 1+4\varrho^2 \implies 2t\,dt = 8\varrho d\varrho$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} \frac{t^2-1}{4}\,\frac{t^2}{4}\,dt = \frac{\pi}{8}\int_1^{\sqrt{5}} (t^2-1)\,t^2\,dt \\
&= \frac{\pi}{8}\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{8}\left(5\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{5}}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\frac{50\sqrt{5}+2}{15}\right) = \frac{25\sqrt{5}+1}{60}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

5. La funzione $F(t)$, utilizzando la funzione di Heaviside, si può scrivere come

$$\begin{aligned}
F(t) &= tH(t) + (2-2t)H(t-1) + (t-2)H(t-2) \\
&= tH(t) - 2(t-1)H(t-1) + (t-2)H(t-2)\,.
\end{aligned}$$

Allora la sua trasformata di Laplace è

$$f(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2\,\mathrm{e}^{-s}}{s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}\,.$$

Tenendo conto dei dati iniziali, la trasformata di Laplace dell'equazione fornisce:

$$s^2y(s) - 1 + 2sy'(s) + 2y(s) = \frac{1-2\,\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$$

e dunque:

$$y(s) = \frac{1-2\,\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2(s^2+2s+2)} + \frac{1}{(s^2+2s+2)}\,.$$

Determiniamo la decomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{(A+C)s^3 + (2A+B+D)s^2 + (2A+2B)s + 2B}{s^2(s^2+2s+2)}\,,
\end{aligned}$$

da cui $B = C = D = 1/2$ e $A = -1/2$. Pertanto dobbiamo antitrasformare la funzione

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{s^2+2s+2}\right)(1 - 2\,\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-2s}) + \frac{1}{(s^2+2s+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)(1 - 2\,\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-2s}) + \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) + \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ &\quad - \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)\mathrm{e}^{-s} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)\mathrm{e}^{-2s}\,. \end{aligned}$$

Otteniamo in definitiva

$$\begin{aligned} Y(t) = \frac{1}{2}\left(t - 1 + \mathrm{e}^{-t}\cos t\right) + \mathrm{e}^{-t}\sin t \\ - \left(t - 2 + \mathrm{e}^{-(t-1)}\cos(t-1)\right)H(t-1) \\ + \frac{1}{2}\left(t - 3 + \mathrm{e}^{-(t-2)}\cos(t-2)\right)H(t-2)\,. \end{aligned}$$

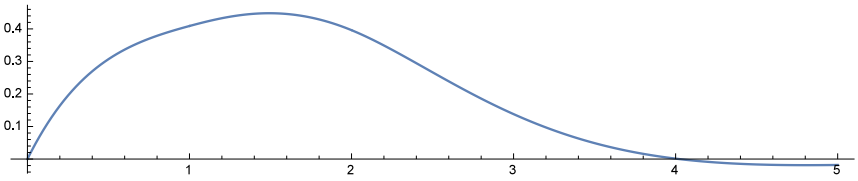


Figura 19: Grafico della soluzione.

58 Compito di Analisi Matematica II del 14/06/2016

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 5z^2$$

nell'insieme

$$E = \{\, (x,y,z)\,;\; z \geq 1\,,\; 2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4\,\}.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \sin t\,, \\ y(0) = 0\,,\; y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E \left(2x^2 + 2y^2 + z\right)\, dxdydz$$

nell'insieme

$$E = \{\, (x,y,z)\,;\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,,\, z \geq 0\,\}.$$

4. Calcolare l'area della superficie individuata da

$$\Sigma = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; z = x^2 - y^2\,,\; x^2 + y^2 \leq 4\,\}\,.$$

5. Calcolare, con i metodi dell'analisi complessa, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{4 + x^4}\, dx\,.$$

Soluzione del compito del 14/06/2016

1. Il dominio E è chiuso e limitato, la funzione f è continua, dunque ha massimo e minimo in E per il Teorema di Weierstrass. Cerchiamo i punti critici liberi risolvendo $\nabla f = (0,0,0)$. Risulta

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, -4y, -10z)$$

dunque l'unico punto critico libero è l'origine ma non è accettabile perché non verifica la condizione $z \geq 1$. Studiamo ora il comportamento sull'ellissoide usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 4)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 4\lambda x = 0 \\ -4y - 4\lambda y = 0 \\ -10z - 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x(1-2\lambda) = 0 \\ 4y(1+\lambda) = 0 \\ 2z(5+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ oppure $\lambda = 1/2$. Per $\lambda = 1/2$, per via della seconda e terza equazione dobbiamo avere $y = 0$ e $z = 0$, dunque non troviamo punti accettabili. Per $x = 0$, dalla seconda equazione segue $y = 0$ o $\lambda = -1$. Nel primo caso otteniamo solo il punto stazionario $(0,0,2)$ dove $f(0,0,2) = -20$. Resta solo il caso $\lambda = -1$. Dalla terza equazione dobbiamo avere che $z = 0$, e quindi non troviamo altri punti critici vincolati sull'ellissoide.

Studiamo ora il vincolo cartesiano $z = 1$ in $2x^2 + 2y^2 \leq 3$. Poniamo $g(x,y) = f(x,y,1) = x^2 + 2y^2 - 5$. Risulta $\nabla g(x,y) = (2x, 4y)$, per cui l'unico punto critico libero per g è $(0,0)$ dove g vale -5. Studiamo infine il comportamento sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 3/2$ usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x,y,\lambda) = g(x,y) - \lambda(x^2+y^2-3/2)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 3/2 \end{cases} \implies \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(2-\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 3/2\,. \end{cases}$$

Come in precedenza, troviamo i punti $(\pm\sqrt{3/2}, 0)$, dove $g = (3/2) - 5 = -7/2$, e $(0, \pm\sqrt{3/2})$, dove $g = 3 - 5 = -2$. Confrontando tutti i valori trovati concludiamo che

$$\max_E f = -2\,, \qquad \min_E f = -20\,.$$

2. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata risolvendo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0\,.$$
Otteniamo una radice doppia $\lambda = -1$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$y(t) = c_1\ \mathrm{e}^{-t} + c_2\, t\ \mathrm{e}^{-t}\,.$$
Poiché $\sin t$ non è soluzione dell'equazione omogenea cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = A\cos t + B\sin t$. Sostituendo nell'equazione troviamo
$$-A\cos t - B\sin t - 2A\sin t + 2B\cos t + A\cos t + B\sin t = \sin t\,,$$
perciò $A = -1/2$, $B = 0$ e l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-t} + c_2\, t\ \mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo
$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{2} = 0 \\ -c_1 + c_2 = 1\,. \end{cases}$$
Dunque la soluzione è
$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + 3t\ \mathrm{e}^{-t} - \cos t\right)\,.$$

3. Utilizziamo le coordinate cilindriche, ed integriamo per strati. Otteniamo $0 \le z \le 2$ e quindi $0 \le \varrho \le \sqrt{4 - z^2}$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Allora l'integrale vale
$$\begin{aligned} &\iiint_E \left(2x^2 + 2y^2 + z\right)\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \left(\varrho^2 + z\right)\varrho\, d\varrho \\ &= 2\pi \int_0^2 \left[\frac{\varrho^4}{4} + z\,\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} dz = 2\pi \int_0^2 \left(\frac{(4-z^2)^2}{4} + z\,\frac{(4-z^2)}{2}\right) dz \\ &= \frac{316\pi}{15}\,. \end{aligned}$$

4. La superficie è cartesiana in quanto $z = x^2 - y^2$ con $x^2 + y^2 \le 1$. L'elemento d'area è
$$d\sigma = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy$$

pertanto, inserendo l'elemento d'area e usando le coordinate polari, otteniamo

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 \sqrt{1+4\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho$$

usiamo la sostituzione $t^2 = 1+4\varrho^2 \implies 2t\,dt = 8\varrho d\varrho$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{17}} \frac{t^2}{4}\,dt = 2\pi \left[\frac{t^3}{12}\right]_1^{\sqrt{17}} = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

5. Osserviamo che la funzione integranda è continua su $\mathbb{R}$ ed infinitesima all'infinito come $1/x^4$, dunque l'integrale improprio è convergente. Per calcolare l'integrale su tutto $\mathbb{R}$, consideriamo la funzione di variabile complessa

$$g(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{4+z^4}$$

che ha quattro poli semplici nelle radici quarte di -4, cioè, usando la formula per le radici quarte di un numero complesso, in $z_{1,2} = 1 \pm i$ e $z_{3,4} = -1 \pm i$. Consideriamo il circuito φ_r formato dal segmento $[-r, r]$ e dalla semicirconferenza $r\,\mathrm{e}^{i\,\vartheta}$ con $0 \le \vartheta \le \pi$. All'interno del circuito (quando $r > \sqrt{2}$) ci sono solo i due punti $z_{1,3} = \pm 1 + i$. Abbiamo, moltiplicando e dividendo per $1+i$,

$$\mathrm{Res}(g(z), z = z_1) = \left[\frac{\mathrm{e}^{iz}}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{\mathrm{e}^{iz}}{4z^3}\right]_{z=(1+i)} = \frac{\mathrm{e}^{i-1}(1+i)}{4\times(-4)} = -\frac{\mathrm{e}^{i-1}(1+i)}{16},$$

e, moltiplicando e dividendo per $-1+i$,

$$\mathrm{Res}(g(z), z = z_3) = \left[\frac{\mathrm{e}^{iz}}{4z^3}\right]_{z=(-1+i)} = \frac{\mathrm{e}^{-i-1}(-1+i)}{4\times(-4)} = -\frac{\mathrm{e}^{-i-1}(-1+i)}{16}.$$

Per il Teorema dei residui otteniamo

$$\int_{\varphi_r} g(z)\,dz = 2\pi\,i\left(-\frac{\mathrm{e}^{i-1}(1+i)}{16} - \frac{\mathrm{e}^{-i-1}(-1+i)}{16}\right)$$

$$= -\pi\,i\,\frac{(\cos 1 + i\sin 1)(1+i) + (\cos 1 - i\sin 1)(-1+i)}{8\,\mathrm{e}} = \frac{\pi}{4e}(\cos 1 + \sin 1).$$

L'integrale sulla semicirconferenza tende a zero per $r \to \infty$, quindi, considerando solo la parte reale, concludiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi(\cos 1 + \sin 1)}{4\,\mathrm{e}}.$$

59 Compito di Analisi Matematica II del 4/07/2016

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione (D.M. 270)

1. Determinare, se esistono, i punti dell'insieme E di massima o di minima distanza dall'origine dove

$$E = \{\, (x, y, z)\, ;\, z^2 - 4xy - 2 = 0 \,\}.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + t\sqrt{y'} = 0\,, \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_K \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy$$

nell'insieme

$$K = \{\, (x, y)\, ;\, x^2 + y^2 \leq 4\,, y \geq 0 \,\}.$$

4. Sia V il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\,; 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

e sia Σ la frontiera di V. Calcolare il flusso uscente attraverso Σ del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2, 2y^2, 3z^2).$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f seguente, precisando prima le proprietà di f e di $\hat{f}$,

$$f(x) = x\ \mathrm{e}^{-|x-2|}\ .$$

Soluzione del compito del 4/07/2016

1. Studiamo la funzione quadrato della distanza dall'origine

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \,.$$

Il dominio E è chiuso ma non limitato, pertanto esiste il minimo ma non il massimo di f. Per verificare che E non è limitato, basta considerare l'intersezione con il piano $z = 0$, per cui risulta

$$-4xy - 2 = 0 \,,$$

e questa è l'equazione di un'iperbole. Cerchiamo i punti critici vincolati di f su E usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(z^2 - 4xy - 2)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4\lambda y = 0 \\ 2y + 4\lambda x = 0 \\ 2z - 2\lambda z = 0 \\ z^2 - 4xy - 2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + 2\lambda y = 0 \\ y + 2\lambda x = 0 \\ z(1 - \lambda) = 0 \\ z^2 - 4xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione abbiamo $z = 0$ oppure $\lambda = 1$. Per $\lambda = 1$, per via della prima e seconda equazione dobbiamo avere $x = y = 0$ e $z = \pm\sqrt{2}$, e quindi $f(0, 0, \pm\sqrt{2}) = 2$. Per $z = 0$, dalla prima e seconda equazione segue $y = x = 0$ o $\lambda = \pm 1/2$. Nel primo caso non otteniamo un punto stazionario accettabile. Resta solo il caso $\lambda = \pm 1/2$. Dalla prima equazione dobbiamo avere che $x = \pm y$, e quindi sostituendo nel vincolo otteniamo solo i punti stazionari $(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2}, 0)$ dove f vale 1.
Confrontando tutti i valori trovati concludiamo che

$$\text{non esiste il } \max_E f \,, \qquad \min_E f = 1 \,.$$

2. L'equazione si può abbassare di ordine con la sostituzione $z(t) = y'(t)$ e dunque $y''(t) = z'(t)$. L'equazione diventa allora

$$\begin{cases} z' + t\sqrt{z} = 0 \\ z(0) = 1 \,. \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} z' = -t\sqrt{z} \\ z(0) = 1 \,. \end{cases}$$

Questa è una equazione del primo ordine a variabili separabili. Risulta

$$\int \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz = -\int t\, dt \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{z} = -\frac{t^2}{2} + c,$$

e quindi, imponendo la condizione iniziale

$$c = 2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{z} = -\frac{t^2}{4} + 1 \quad \Longrightarrow \quad z(t) = 1 + \frac{t^4}{16} - \frac{t^2}{2}\,.$$

Integrando otteniamo:

$$y(t) = \int \left(1 + \frac{t^4}{16} - \frac{t^2}{2}\right) dt = t + \frac{t^5}{80} - \frac{t^3}{6} + c\,,$$

e imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ concludiamo che $c = 1$ e in definitiva

$$y(t) = \frac{t^5}{80} - \frac{t^3}{6} + t + 1\,.$$

3. Utilizziamo le coordinate polari. Otteniamo $0 \le \varrho \le 2$ e $0 \le \vartheta \le \pi$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned}\iint_K \frac{x^2y^2}{x^2+y^2+1}\,dxdy &= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^2 \frac{\varrho^4 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta}{\varrho^2+1}\varrho\,d\varrho \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2(2\vartheta)d\vartheta \int_0^2 \frac{\varrho^4}{\varrho^2+1}\varrho\,d\varrho\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$\int_0^\pi \sin^2(2\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\begin{aligned}&\int_0^2 \frac{\varrho^4}{\varrho^2+1}\varrho\,d\varrho = \int_0^2 \frac{(\varrho^4-1)+1}{\varrho^2+1}\varrho\,d\varrho \\ &= \int_0^2 \left(\varrho^3 - \varrho + \frac{\varrho}{\varrho^2+1}\right) d\varrho = \left[\frac{\varrho^4}{4} - \frac{\varrho^2}{2} + \frac{1}{2}\log(\varrho^2+1)\right]_0^2 \\ &= 4 - 2 + \frac{1}{2}\log 5 = 2 + \frac{1}{2}\log 5\,.\end{aligned}$$

In definitiva risulta

$$\iint_K \frac{x^2y^2}{x^2+y^2+1}\,dxdy = \frac{\pi}{16}(4 + \log 5)\,.$$

Possiamo usare il teorema della divergenza. Risulta

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = 2x + 4y + 6z\,,$$

e allora

$$\iint_\Sigma F \cdot \nu d\sigma = \iiint_V (2x + 4y + 6z)\, dxdydz.$$

Utilizziamo le coordinate cilindriche. Abbiamo $0 \le z \le 1$, $0 \le \varrho \le z$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Dunque

$$\iiint_V (2x + 4y + 6z)\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dz \int_0^z (2\varrho\cos\vartheta + 4\varrho\sin\vartheta + 6z)\varrho\, d\varrho$$
$$= 2\pi \int_0^1 \left[3\varrho^2 z\right]_0^z dz = 2\pi \int_0^1 3z^3\, dz = 2\pi \left[\frac{3z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}\,.$$

4. La funzione f è sommabile e infinitesima all'infinito di ordine arbitrariamente grande. Quindi $\hat{f}$ sarà di classe C^∞. Consideriamo le due funzioni $g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $h(x) = \mathrm{e}^{-|x-2|}$ e infine $f(x) = x\, h(x)$. Utilizzando le regole di trasformazione, elencate in appendice alle dispense, otteniamo

$$\hat{g}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}\,,$$
$$\hat{h}(\xi) = \frac{2\ \mathrm{e}^{-2i\xi}}{1+\xi^2}\,,$$
$$\hat{f}(\xi) = i\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{h}(\xi) = \frac{4e^{-2i\xi}(\xi^2 - i\xi + 1)}{(\xi^2+1)^2}$$