Esame di Maturità – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 19 giugno 2026

QUESITO 2 - soluzione a cura di L. Rossi e L. Tomasi

2. Si considerino, nello spazio tridimensionale, i punti $A(2;-4;3)$, $B(3;5;-1)$, $C(-6;1;0)$, $D(-1;4;8)$.

a) Verificare che A, B, C, D sono i vertici di un tetraedro regolare.

b) Determinare l'equazione del piano tangente in A alla superficie sferica passante per i punti A, B, C, D.

Soluzione

Punto a)

I quattro punti dati non sono complanari. Per dimostrarlo, possiamo trovare l'equazione del piano che passa per *A, B, C*, che è

$$x - 5y - 11z + 11 = 0.$$

Il punto *D* non appartiene a questo piano perché sostituendo si ha

$$-1 - 5 \cdot 4 - 11 \cdot 8 + 11 = -98 \neq 0\,.$$

Per verificare che *A, B, C, D* è un tetraedro regolare, verifichiamo che tutti gli spigoli sono congruenti:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \sqrt{1 + 81 + 16} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{64 + 25 + 9} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$
$$\overline{AD} = \sqrt{9 + 64 + 25} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{81 + 16 + 1} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$
$$\overline{BD} = \sqrt{16 + 1 + 81} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$
$$\overline{CD} = \sqrt{25 + 9 + 64} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

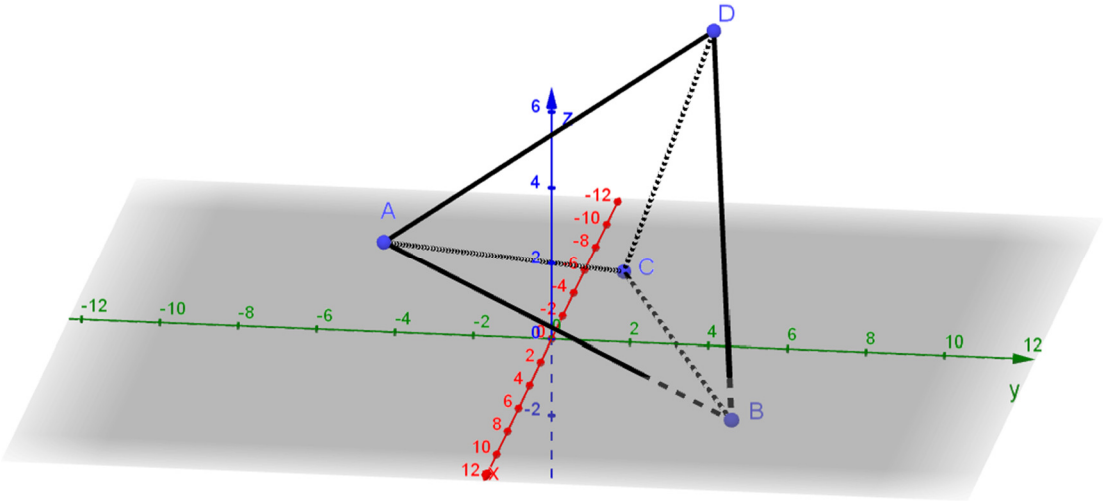


Figura 1

Punto b)

Per determinare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica in A, troviamo il vettore che passa per A e per il baricentro G della faccia BCD (essendo il solido un tetraedro regolare); tale vettore è perpendicolare al piano richiesto.

$$G = \left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3}, \frac{y_B + y_C + y_D}{3}, \frac{z_B + z_C + z_D}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Il vettore $\overrightarrow{GA}$ ha componenti $\vec{v}_{GA} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{22}{3}, \frac{2}{3}\right)$; come vettore normale al piano possiamo considerare il vettore $\vec{n} = (5, -11, 1)$ parallelo a $\overrightarrow{GA}$.

Preso un punto $P(x, y, z)$ qualunque del piano, imponiamo che il vettore $\overrightarrow{AP}$ sia perpendicolare al vettore $\vec{n}$ ossia che il loro prodotto scalare sia nullo:

$$(x - 2, y + 4, z - 3) \cdot (5, -11, 1) = 0$$

da cui svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione del piano:

$$5x - 11y + z - 57 = 0\,.$$

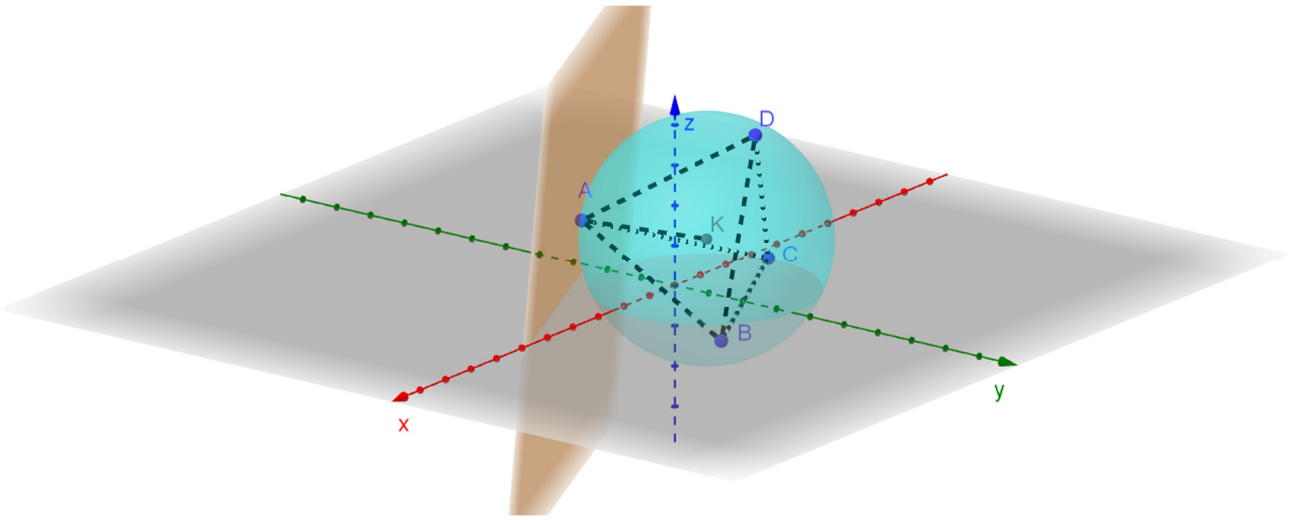


Figura 2

In un altro modo, si poteva trovare il centro della sfera circoscritta al tetraedro regolare, che coincide con il suo baricentro:

$$K = \frac{A + B + C + D}{4}$$

$$K = \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Si trova il vettore $\overrightarrow{KA}$:

$$\overrightarrow{KA} = (x_A - x_K, y_A - y_k, z_A - z_K) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Piano passante per A e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{KA}$:

$$\frac{5}{2}(x - 2) - \frac{11}{2}(y + 4) + \frac{1}{2}(z - 3) = 0$$

ossia

$$5(x - 2) - 11(y + 4) + (z - 3) = 0$$

che dà

$$5x - 11y + z - 57 = 0\,.$$

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta / ☒ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre	
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No	
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☐ Sì	☐ No	☒ Parzialmente	