Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.

PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = ax + b\sqrt{x} + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a. Determinare i valori dei parametri a, b, c in corrispondenza dei quali la funzione abbia il punto di massimo assoluto di coordinate (4; 8) e uno zero in $x = 16$.

D'ora in avanti, si assuma $a = -2$, $b = 8$, $c = 0$.

b. Studiare f e tracciare un suo grafico rappresentativo γ, dopo averne analizzato il segno, la derivabilità, la monotonia e la concavità. Verificare che la funzione non presenta asintoti. Al variare del parametro reale k, stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c. Spiegare perché f non è invertibile nel suo dominio e individuare l'intervallo limitato $[\alpha; \beta]$, di massima ampiezza, in cui può essere definita una funzione inversa g. Esprimere analiticamente la funzione g, specificare il suo dominio, le coordinate del punto a tangente verticale e tracciare un suo grafico rappresentativo.

d. Scrivere l'equazione della retta r, tangente a γ nel suo punto di ascissa 1. Calcolare l'area della regione delimitata da r, da γ e dall'asse delle ordinate. Dimostrare che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, definita per $x > 0$, presenta esattamente uno zero, un punto stazionario e un punto di flesso.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, con $-2 \le x \le 2$, in cui $P(t)$ indica un polinomio di terzo grado. I grafici γ e γ'', in figura, sono rappresentativi di F ed F'', derivata seconda della funzione F.

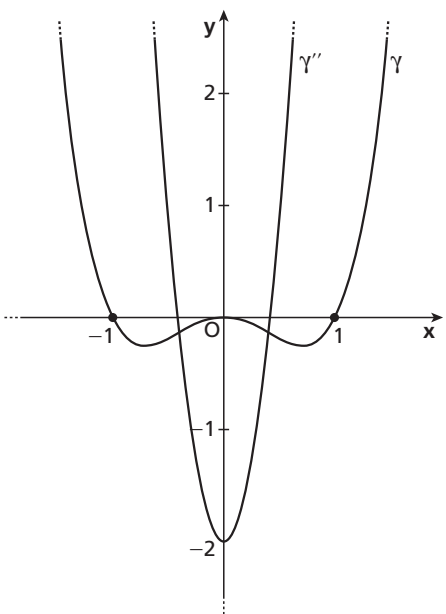


Figura 1

a. Utilizzare le informazioni che si possono ricavare da γ per determinare $P(t)$, considerando che F è una funzione pari e $F(2) = 12$.

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

D'ora in avanti, si ponga $P(t) = 4t^3 - 2t$.

b. Ricavare l'espressione analitica della funzione $F(x)$ e determinare le coordinate dei punti di minimo assoluto e dei punti di flesso. Utilizzare le informazioni ottenute su F per tracciare il grafico γ', rappresentativo della funzione F', derivata della funzione F.

c. Al variare dei parametri reali α, β, calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^\alpha}$ e $\lim_{x\to \pm 1} \frac{F(x)}{(x \pm 1)^\beta}$.

d. Sia P un punto di γ'', di ascissa positiva, e sia r_P la retta tangente a γ'' in P. Determinare le coordinate di P in modo che r_P formi con gli assi coordinati un triangolo di area minima. Successivamente, determinare le coordinate di P affinchè r_P formi con gli assi coordinati un triangolo isoscele.

QUESTIONARIO

1 Determinare il perimetro e l'area di un poligono regolare di lato 4 cm, sapendo che gli angoli interni sono ampi 150°.

2 Un'urna contiene 16 palline, numerate da 1 a 16. Vengono estratte in blocco 5 palline dall'urna; qual è la probabilità che il numero più grande tra quelli usciti sia maggiore di 9?

3 Quanti sono i numeri naturali di tre cifre tali che la cifra "8" compare almeno una volta? Quanti quelli in cui la cifra "0" compare almeno una volta?

4 Mostrare che, nello spazio tridimensionale, il piano di equazione $x + 2y - 3z - 7 = 0$ è tangente alla superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$ e stabilire le coordinate del punto di tangenza T. Scrivere, inoltre, l'equazione di una retta che sia tangente alla superficie S nel punto T.

5 Si consideri la famiglia di funzioni $f_k(x) = \ln(1 - kx) + kx^2$, dove k è un parametro reale non nullo. Determinare il valore di k in modo che il grafico della funzione abbia un punto di flesso a tangente orizzontale.

6 Sia γ il grafico rappresentativo della curva di equazione $xy = 3$. Determinare le coordinate del punto in cui la retta di equazione $y = 3x - 8$ è normale a γ.

7 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2e^{x^2-x} + a & \text{per } x \le 1 \\ bx^2 + x + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$, determinare il valore dei parametri reali a, b, affinché la funzione sia continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

8 Dimostrare che la curva di equazione $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

PROBLEMA 1

a. La funzione $f(x) = ax + b\sqrt{x} + c$, con a, b e $c \in \mathbb{R}$, è una funzione irrazionale intera che ha per dominio $x \geq 0$ e per derivata prima $f'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}}$ definita in $x > 0$.

Poiché il punto $A(4; 8)$ che deve essere il massimo assoluto della funzione non appartiene agli estremi del dominio, possiamo dedurre che A sia un estremo relativo e porre la condizione che in $x = 4$ si annulla la derivata prima; inoltre dobbiamo disporre il passaggio per il punto stesso e per $(16; 0)$, essendo $x = 16$ uno zero della funzione.

Mettiamo a sistema tutte le condizioni trovate e otteniamo:

$$\begin{cases} f'(4) = 0 \\ f(4) = 8 \\ f(16) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{4} = 0 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -4a = 8 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ a = -2 \\ c = 0 \end{cases},$$

da cui $f(x) = -2x + 8\sqrt{x}$.

Verifichiamo che $(4; 8)$ sia un massimo relativo:

$$f'(x) = -2 + \frac{4}{\sqrt{x}} \text{ e } f''(x) = \left(-2 + 4 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x^3}},$$

$$f''(4) = -\frac{2}{\sqrt{64}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} < 0 \rightarrow (4; 8) \text{ è un massimo per } f.$$

b. Studiamo il grafico di $f(x) = -2x + 8\sqrt{x}$. La funzione è definita e continua per $x \geq 0$ e non presenta simmetrie perché il dominio non è simmetrico rispetto a O e interseca gli assi in $O(0; 0)$ e in $A(16; 0)$.

Studiamo il segno della funzione $f(x) > 0$:

$$-2x + 8\sqrt{x} > 0 \rightarrow {}^{4)}\ 8\sqrt{x} > 2x \rightarrow 4\sqrt{x} > x,$$

possiamo elevare al quadrato per $x \geq 0$:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 16x > x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16x - x^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 < x < 16 \end{cases}$$

La funzione è positiva per $0 < x < 16$, si annulla in $x = 0 \vee x = 16$ ed è negativa per $x > 16$.

La funzione non presenta asintoti verticali perché è continua in $x \geq 0$ e, poiché $\lim_{x \to +\infty} (-2x + 8\sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} x\left(-2 + \frac{8}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$, non ha asintoto orizzontale destro.

Controlliamo se esite l'asintoto obliquo destro:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-2 + \frac{8}{\sqrt{x}}\right) = -2,$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (\cancel{-2x} + 8\sqrt{x} + \cancel{2x}) = \lim_{x \to +\infty} 8\sqrt{x} = +\infty.$$

Poiché q è un valore infinito, la funzione non ammette asintoto obliquo.
Studiamo ora il segno della derivata prima:

$$f'(x) = -2 + \frac{4}{\sqrt{x}} \text{ per } x > 0:$$

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

$f'(x) \geq 0: -2 + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 0 \rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2$

Poiché per $x > 0$ entrambi i membri presentano quantità positive, possiamo elevarli al quadrato e ottenere

$\frac{16}{x} \geq 4 \rightarrow \frac{x}{16} \leq \frac{1}{4} \rightarrow x \leq 4.$

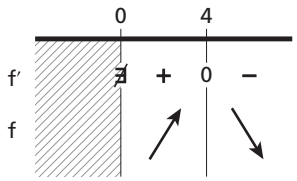


Figura 2

La funzione ha quindi solo un massimo relativo (e assoluto) in (4; 8) ed è monotòna crescente in $0 \leq x \leq 4$ e monotòna decrescente per $x \geq 4$.

Poiché $\lim_{x \to 0^+} \left(-2 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$, in $x = 0$ la funzione non è derivabile e l'asse y è tangente alla funzione in $x = 0$.

Studiamo il segno della derivata seconda $f''(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^3}}$.

Poiché $f''(x) < 0$ per $x > 0$, abbiamo che la funzione ha sempre la concavità rivolta verso il basso.
Rappresentiamo ora la funzione con tutte le informazioni ricavate:

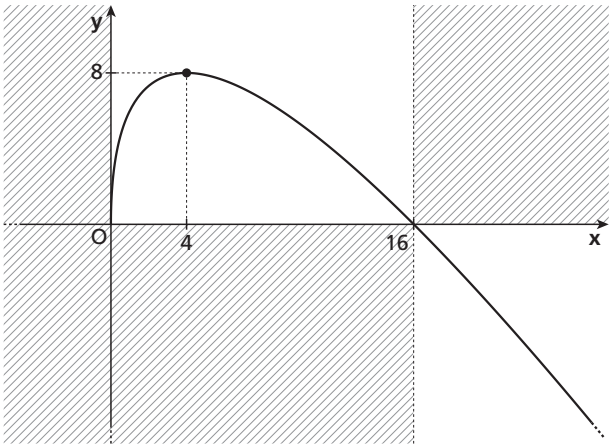


Figura 3

Possiamo discutere il numero delle soluzioni di $f(x) = k$ dal grafico:

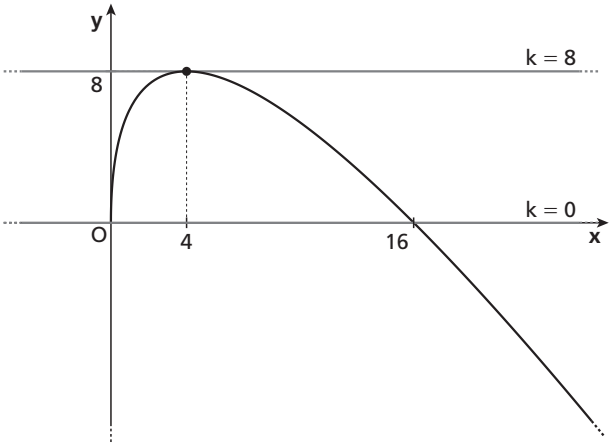


Figura 4

per $k > 8$: nessuna soluzione
per $k = 8$: due soluzioni coincidenti

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

per $0 \le k < 8$: due soluzioni distinte

per $k < 0$: una soluzione

c. La funzione f non è invertibile nel suo dominio perché f non è iniettiva; infatti f è crescente per $0 \le x \le 4$ e decrescente per $x \ge 4$. Quindi, f non è monotòna per $x \ge 0$.
Può essere definita una funzione inversa g per f individuando un intervallo in cui f risulti monotòna, quindi in $[0; 4]$ oppure in $[4; +\infty[$. Fra questi due intervalli, quello limitato di ampiezza massima è $[0; 4]$. Consideriamo quindi f ristretta in $[0; 4]$, con insieme immagine $[0; 8]$, come possiamo dedurre dal grafico di f.
Esplicitiamo la variabile x in funzione della variabile y:

$$y = -2x + 8\sqrt{x} \;\rightarrow\; 2x - 8\sqrt{x} + y = 0 \;\rightarrow\; 2(\sqrt{x})^2 - 8\sqrt{x} + y = 0 \;\rightarrow$$

$$\sqrt{x} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 2y}}{2} \;\rightarrow\; 2\sqrt{x} - 4 = \pm\sqrt{16 - 2y}.$$

Poiché per $0 \le x \le 4$, abbiamo che $2\sqrt{x} - 4 \le 0$, consideriamo solo il segno "$-$" davanti alla radice:

$$2\sqrt{x} - 4 = -\sqrt{16 - 2y} \rightarrow 2\sqrt{x} = 4 - \sqrt{16 - 2y} \rightarrow \sqrt{x} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{16 - 2y} \rightarrow x = \left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{16 - 2y}\right)^2.$$

Scambiando la variabile x con la variabile y, otteniamo $y = \left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{16 - 2x}\right)^2$.

La funzione inversa $g: [0; 8] \rightarrow [0; 4]$ ha dunque dominio $0 \le x \le 8$, insieme immagine $0 \le y \le 4$ ed espressione analitica:

$$g(x) = \left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{16 - 2x}\right)^2.$$

Calcoliamo la derivata prima di g:

$$g'(x) = \cancel{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{16 - 2x}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{16 - 2x}} \;\rightarrow\; g'(x) = \frac{2}{\sqrt{16 - 2x}} - \frac{1}{2}.$$

La derivata prima di g è definita per $0 \le x < 8$.

Poiché $\lim\limits_{x \to 8^-} \left(\frac{2}{\sqrt{16 - 2x}} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$, $x = 8$ è un punto di flesso a tangente verticale.

Tracciamo il grafico di g disegnando il simmetrico di f rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, per $0 \le x \le 4$.

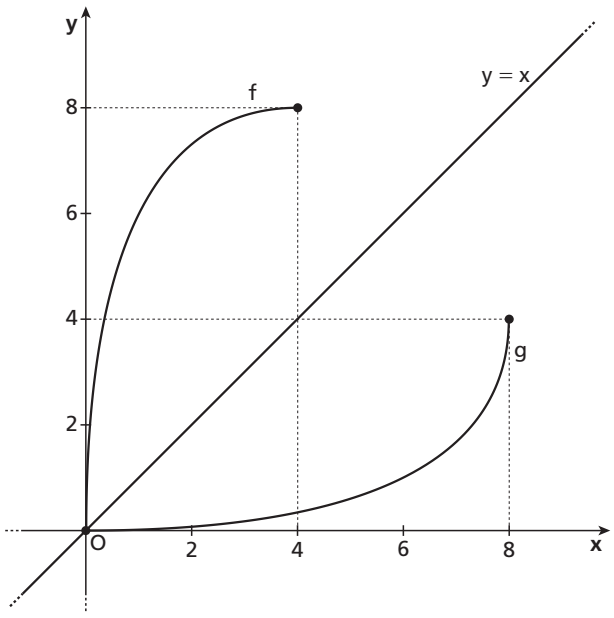


Figura 5

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

d. La retta r tangente a γ nel punto di ascissa $x = 1$ ha equazione:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

dove

$$f(1) = -2 \cdot 1 + 8 \cdot \sqrt{1} = -2 + 8 = 6;$$

$$f'(1) = -2 + \frac{4}{\sqrt{1}} = -2 + 4 = 2;$$

quindi $y - 6 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x + 4$.

Riportiamo la retta nel grafico

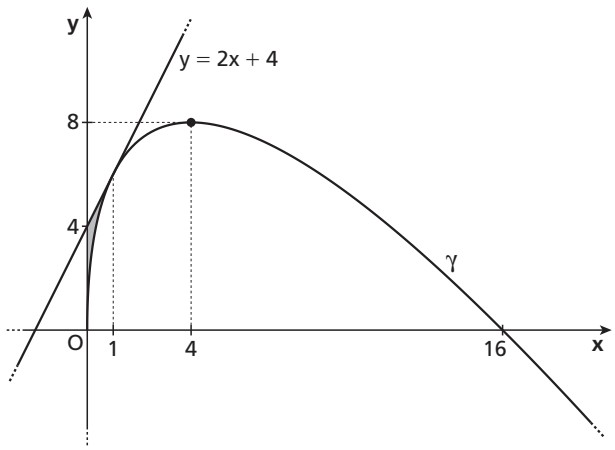


Figura 6

- Calcoliamo l'area della regione delimitata da r, da γ e dall'asse delle ordinate:

$$\int_0^1 \left[(2x + 4) - (-2x + 8\sqrt{x})\right] dx = \int_0^1 (2x + 4 + 2x - 8\sqrt{x})\, dx = \int_0^1 \left(4x + 4 - 8x^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$\left[2x^2 + 4x - 8 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[2x^2 + 4x - \frac{16}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 + 4 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$$

La funzione $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ ha la seguente espressione analitica per $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x (-2t + 8\sqrt{t})\, dt = \left[-t^2 + 8 \cdot \frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^x = -x^2 + \frac{16}{3}x\sqrt{x}.$$

Quindi: $F(x) = 0 \rightarrow -x^2 + \frac{16}{3}x\sqrt{x} = 0 \rightarrow x\sqrt{x}\left(-\sqrt{x} + \frac{16}{3}\right) = 0$ $\begin{cases} x = 0 & \text{non accettabile} \\ \sqrt{x} = \frac{16}{3} \rightarrow x = \frac{256}{9} & \text{accettabile} \end{cases}$

Perciò F ha come unico zero $x = \frac{256}{9}$.

Inoltre poiché $f(t)$ è continua per $t \geq 0$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che $F'(x) = f(x)$ quindi

- $F'(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = 0$;

  lo studio dei segni di F' coincide con quello di f, per cui possiamo affermare che F' si annulla in $x = 0 \vee x = 16$, ma essendo definita in $x > 0$, il primo non è accettabile e F ha come unico punto stazionario $x = 16$.
- $F''(x) = 0 \leftrightarrow f'(x) = 0$;

  lo studio dei segni di F'' coincide con quello di f', per cui possiamo affermare che F'' si annulla solo in $x = 4$ e F ha come unico punto di flesso $x = 4$.

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

PROBLEMA 2

a. La funzione integrale $F(x) = \int_0^x P(t)\,dt$, definita per $-2 \le x \le 2$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale ha come derivata: $F'(x) = P(x)$.
$P(t)$ deve essere un polinomio di terzo grado, perciò: $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, con $a \neq 0$.
Siccome $F(x)$ è una funzione pari, per la proprietà delle derivate di una funzione pari $F'(x)$ deve essere una funzione dispari, per cui $b = d = 0$.
La derivata seconda di $F(x)$, $F''(x) = P'(x)$, per $x = 0$ deve assumere il valore -2, deducibile dal grafico di γ'' quindi:

$$P'(t) = 3at^2 + 2bt + c \;\rightarrow\; P'(0) = c \;\rightarrow\; c = -2.$$

Infine, poiché $F(2) = 12$, deve risultare che:

$$F(2) = \int_0^2 (at^3 - 2t)dt = \left[\frac{a}{4}t^4 - t^2\right]_0^2 = 4a - 4 \;\rightarrow\; 4a - 4 = 12 \;\rightarrow\; a = 4.$$

Si ottiene quindi che: $P(t) = 4t^3 - 2t$.

b. Determiniamo l'espressione analitica di $F(x)$ nell'intervallo $-2 \le x \le 2$:

$$F(x) = \int_0^x P(t)\,dt = \int_0^x (4t^3 - 2t)dt = \left[t^4 - t^2\right]_0^x = x^4 - x^2.$$

La derivata prima è: $F'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$ e si annulla per $x = 0 \vee x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Studiando il segno di $F'(x)$ nell'intervallo $-2 \le x \le 2$ si trova che i due minimi assoluti hanno ascisse $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poiché $F\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, le coordinate sono $m_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ e $m_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

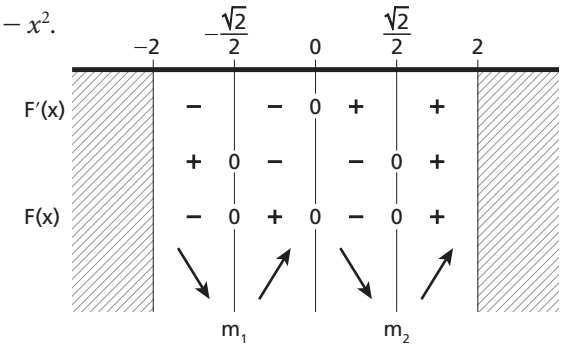


Figura 7

La derivata seconda è: $F''(x) = 12x^2 - 2$.

Si annulla per $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. Studiando il segno di $F''(x)$ nell'intervallo $-2 \le x \le 2$, si trova che $F(x)$ ammette due flessi di coordinate:

$$F\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{1}{36} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{36}$$

$$F_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{5}{36}\right) \text{ e } F_2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{5}{36}\right).$$

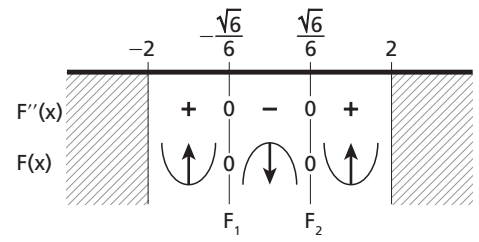


Figura 8

Per rappresentare il grafico di $y = F'(x)$ osserviamo che:

- ha dominio $-2 \le x \le 2$;
- è una funzione dipari;
- ha tre zeri in $x = 0$ e $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- ha due punti stazionari in $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$;

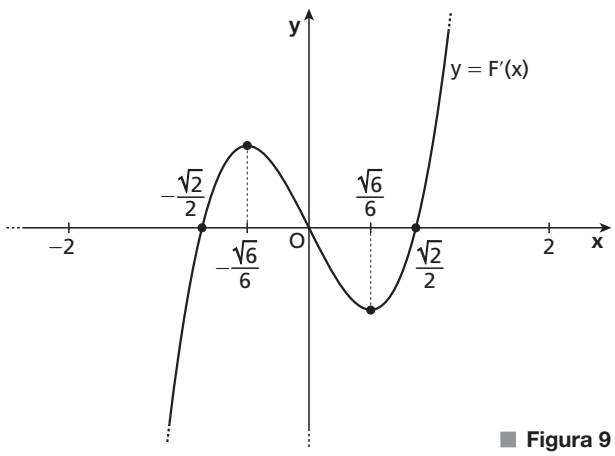


Figura 9

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

c. Consideriamo il limite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{\alpha}}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^2}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-1)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}x^{2-\alpha}\cdot(x^2-1)$$

– Se $2-\alpha>0\ \rightarrow\ \alpha<2$ si ha: $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-\alpha}\cdot(x^2-1)=0$;

– se $2-\alpha=0\ \rightarrow\ \alpha=2$ si ha: $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)=-1$;

– se $2-\alpha<0\ \rightarrow\ \alpha>2$ si ha: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{x^{\alpha-2}}=-\infty$.

Osserviamo che se $\alpha>2$, il dominio della funzione $y=\dfrac{x^2-1}{x^{\alpha-2}}$ è $x>0$, per cui il limite può essere calcolato solo per $x\ \rightarrow\ 0^+$.

Consideriamo i limiti: $\lim\limits_{x\to\pm 1}\dfrac{F(x)}{(x\pm 1)^{\beta}}$, con $\beta\in\mathbb{R}$.

Se $x\ \rightarrow\ 1$ si ha:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{(x+1)^{\beta}}=\dfrac{0}{2^{\beta}}=0$ per ogni valore di $\beta\in\mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{(x-1)^{\beta}}=\lim\limits_{x\to 1}\left[x^2(x+1)(x-1)^{1-\beta}\right]$

– Se $1-\beta>0\ \rightarrow\ \beta<1$ si ha $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^2(x+1)(x-1)^{1-\beta}\right]=0$;

– Se $1-\beta=0\ \rightarrow\ \beta=1$ si ha $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^2(x+1)\right]=2$;

– Se $1-\beta<0\ \rightarrow\ \beta>1$ si ha $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2(x+1)}{(x-1)^{\beta-1}}=+\infty$.

Osserviamo che se $\beta>1$, il dominio della funzione $y=\dfrac{x^2(x+1)}{(x-1)^{\beta-1}}$ è $x>1$, per cui il limite può essere calcolato solo per $x\ \rightarrow\ 1^+$.

Se $x\ \rightarrow\ -1$ si ha:

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{F(x)}{(x+1)^{\beta}}=\lim\limits_{x\to -1}\left[x^2(x-1)(x+1)^{1-\beta}\right]$

– Se $1-\beta>0\ \rightarrow\ \beta<1$ si ha $\lim\limits_{x\to -1}\left[x^2(x-1)(x+1)^{1-\beta}\right]=0$;

– Se $1-\beta=0\ \rightarrow\ \beta=1$ si ha $\lim\limits_{x\to -1}\left[x^2(x-1)\right]=-2$;

– Se $1-\beta<0\ \rightarrow\ \beta>1$ si ha $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^{\beta-1}}=-\infty$.

Osserviamo che se $\beta>1$, il dominio della funzione $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^{\beta-1}}$ è $x>-1$, per cui il limite può essere calcolato solo per $x\ \rightarrow\ -1^+$.

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{F(x)}{(x-1)^{\beta}}$ non esiste, poiché il dominio della funzione è $x>1$.

d. La funzione $F''(x)=12x^2-2$ è definita per $-2\le x\le 2$.
Consideriamo un suo punto P di ascisse positive $0<k\le 2$: $P(k;\,12k^2-2)$.
Poiché $F'''(x)=24x$, l'equazione della retta tangente in f a γ'' ha equazione:

$$y-y_p=m(x-x_p)\ \rightarrow\ y-12k^2+2=24k(x-k)\ \rightarrow\ y=24kx-12k^2-2.$$

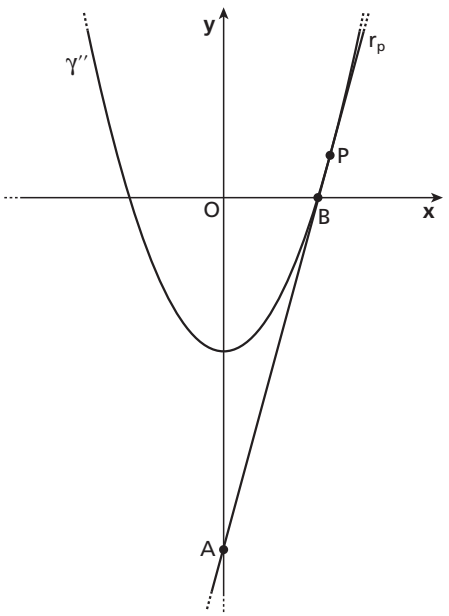


Figura 10

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

Tale retta incontra gli assi cartesiani nei punti:

$A: \begin{cases} x = 0 \\ y = -12k^2 - 2 \end{cases} \rightarrow A(0; -12k^2 - 2)$

$B: \begin{cases} 24kx - 12k^2 - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{6k^2+1}{12k}; 0\right).$

L'area del triangolo rettangolo AOB vale:

$$A(k) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{\left|-12k^2 - 2\right| \cdot \left|\frac{6k^2+1}{12k}\right|}{2} = \frac{(6k^2+1)^2}{12k}, \text{ con } 0 < k \leq 2.$$

Calcoliamo la derivata prima $A'(k) = \frac{6k^2+1}{12}\left[-\frac{6k^2+1}{k^2} + 24\right] = \frac{(6k^2+1)(18k^2-1)}{12k^2}$. Studiando il suo segno, si ottiene che si ha un minimo per $k = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Per cui le coordinate di P che rendono minima l'area del triangolo AOB sono: $P\left(\frac{\sqrt{2}}{6}; -\frac{4}{3}\right)$.

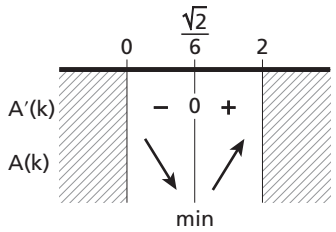


Figura 11

Il triangolo AOB è invece isoscele se $\overline{OA} = \overline{OB}$, cioè:

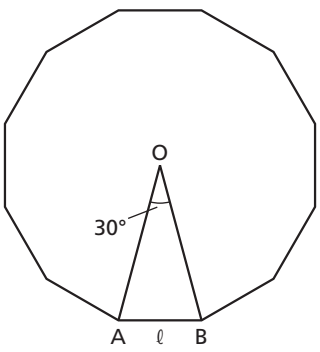
$12k^2 + 2 = \frac{6k^2+1}{12k} \rightarrow 24k = 1$, dividendo per $6k^2 + 1$ sempre diverso da zero, quindi $k = \frac{1}{24}$. Il punto P ha quindi coordinate $P\left(\frac{1}{24}; -\frac{95}{48}\right)$ per ottenere un triangolo AOB isoscele.

QUESTIONARIO

1 La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $180° \cdot (n-2)$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Quindi, possiamo determinare il numero n dei lati del poligono regolare ponendo:

$$\frac{180° \cdot (n-2)}{n} = 150° \rightarrow 180° \cdot (n-2) = 150° \cdot n \rightarrow 30° \cdot n = 360° \rightarrow n = 12.$$

Il poligono è dunque un dodecagono regolare il cui perimetro è $2p = n \cdot l = 12 \cdot 4 = 48$ cm.
Per determinare l'area dobbiamo calcolare l'apotema del poligono considerando che il dodecagono è formato da 12 triangoli isosceli congruenti che hanno per lato il raggio della circonferenza circoscritta, per angolo al vertice un angolo di ampiezza $360° : 12 = 30°$ e per base $l = 4$ cm.
Osserviamo il triangolo ABO, in figura:



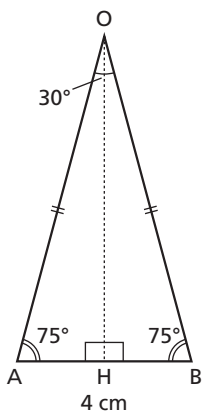


Figura 12

$A\widehat{B}O \cong O\widehat{A}B = \frac{180° - 30°}{2} = 75°; \quad \overline{HB} = \frac{\overline{AB}}{2} = 2.$

Per il secondo teorema dei triangoli rettangoli, otteniamo:

$\overline{OH} = \overline{HB} \cdot \tan 75° = 2 \cdot \tan(45° + 30°) =$

$$2\frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°} = 2 \cdot \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$2 \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{9+3+6\sqrt{3}}{6} =$$

$$2 \cdot \frac{\cancel{6}(2+\sqrt{3})}{\cancel{6}} = 2(2+\sqrt{3}).$$

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

Quindi:

$$\text{Area} = \cancel{12}^{6} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OH}}{\cancel{2}} = 6 \cdot 4 \cdot 2(2 + \sqrt{3}) = 48(2 + \sqrt{3})\ \text{cm}^2.$$

2 Le palline vengono estratte in blocco, ciò significa che non esiste un ordine di estrazione delle palline e che esse non sono ripetibili, perciò dobbiamo utilizzare le combinazioni semplici per il calcolo.
Tutte le combinazioni semplici possibili sono $C_{16,5}$.
Se poniamo l'evento E = "il numero più grande tra quelli usciti è maggiore di 9", significa che "*almeno uno* fra i numeri usciti è maggiore di 9", evento contrario a "nessun numero uscito è maggiore di 9", cioè che "tutti i numeri usciti sono ≤ 9".

Quindi:

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{C_{9,5}}{C_{16,5}} = 1 - \frac{\binom{9}{5}}{\binom{16}{5}} = 1 - \frac{\frac{9!}{\cancel{5}!4!}}{\frac{16!}{\cancel{5}!11!}} = 1 - \frac{3}{104} \simeq 0{,}971 \rightarrow p(E) \simeq 97{,}1\%.$$

3 I numeri naturali di tre cifre sono disposizioni con ripetizione di tre cifre da 0 a 9, con la prima cifra diversa da 0, quindi in totale soni $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.
Se la cifra "8" deve comparire almeno una volta, possiamo sottrarre dai numeri totali quelli in cui non compare mai:

$$900 - 8 \cdot 9 \cdot 9 = 900 - 648 = 252.$$

Se è la cifra "0" a dover comparire almeno una volta, dobbiamo sottrarre nuovamente dai numeri totali quelli in cui non compare mai, escludendola però solo dalla seconda e terza cifra:

$$900 - 9 \cdot 9 \cdot 9 = 900 - 729 = 171.$$

4 La superficie S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$ è una sfera di centro $C(1; -1; 2)$ e raggio $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2 - (-8)} = \sqrt{14}$.
Calcoliamo la distanza fra il centro C della sfera e il piano π: $x + 2y - 3z - 7 = 0$:

$$d(C, \pi) = \frac{|1 + 2(-1) - 3 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

Poiché $d = r$, possiamo affermare che il piano π è tangente alla sfera S.
Indichiamo con r, ora, la retta che contiene il raggio della sfera S.
Per individuare le coordinate del punto T di tangenza, intersechiamo il piano π con la retta $r \perp \pi$ e passante per il centro C della sfera S.

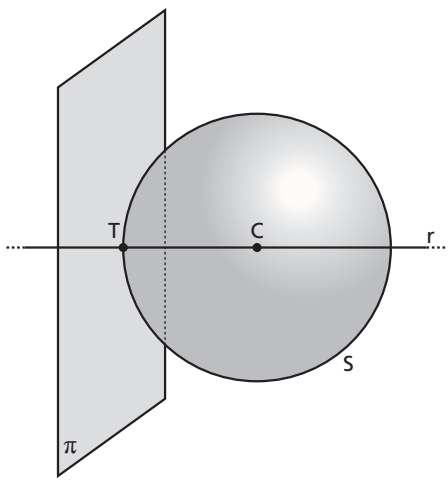


Figura 13

Il vettore normale al piano π è $\vec{n}(1; 2; -3)$, quindi il vettore direzione di r è parallelo a $\vec{n}$: $\vec{v_r}(1; 2; -3)$.
Scriviamo le equazioni parametriche di r:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t, \text{ con } t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

e mettiamole a sistema con π:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \\ x + 2y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (1 + t) + 2(-1 + 2t) - 3(2 - 3t) - 7 = 0 \rightarrow$$
$$1 + t - 2 + 4t - 6 + 9t - 7 = 0 \rightarrow 14t = 14 \rightarrow t = 1.$$

Otteniamo quindi $T(2; 1; -1)$.

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

Tutte le rette appartenenti a π che passano per T sono perpendicolari alla figura S in T.

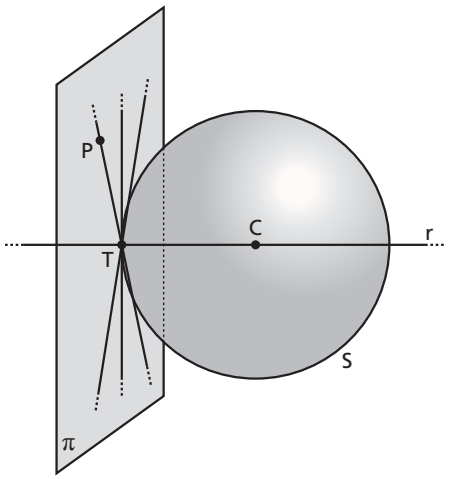


Figura 14

Prendiamo quindi un punto P di π, diverso da T, per esempio $P(7;0;0)$ e determiniamo la retta s di π che passa per P e T e ha vettore direzione:

$$\vec{v_s}(x_P - x_T;\ y_P - y_T;\ z_P - z_T) \rightarrow \vec{v_s}(7-2;0-1;0+1) \rightarrow$$
$$\vec{v_s}(5;-1;1).$$

Le equazioni parametriche di s sono pertanto:

$$\begin{cases} x = 7 + 5k \\ y = -k \\ z = k \end{cases}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

5 La famiglia di funzioni $f_k(x) = \ln(1 - kx) + kx^2$, con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, ha dominio $1 - kx > 0 \rightarrow x < \frac{1}{k}$.
Calcoliamo la derivata prima delle funzioni:

$$f_k'(x) = \frac{1}{1-kx} \cdot (-k) + 2kx = \frac{-k + 2kx(1-kx)}{1-kx} = \frac{-2k^2x^2 + 2kx - k}{1-kx};$$

Poiché $1 - kx > 0$ per ogni valore del dominio, risulta:

$$f_k'(x) \geq 0 \leftrightarrow -2k^2x^2 + 2kx - k \geq 0.$$

Il coefficiente di x^2 è sempre negativo per ogni k non nullo, mentre il discriminante è:

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 2k^2 \cdot k = k^2 - 2k^3 = k^2(1-2k).$$

Se $\frac{\Delta}{4} > 0$, per $k^2(1-2k) > 0 \rightarrow 1 - 2k > 0 \rightarrow k > \frac{1}{2}$, f_k' ha due zeri distinti x_1 e x_2 e assume segno negativo per valori esterni e segno positivo per valori interni, perciò il valore minore x_1 è un punto di minimo per f_k mentre x_2 un punto di massimo.

Se $\frac{\Delta}{4} = 0$, per $k = \frac{1}{2}$, f_k' ha un solo zero e assume sempre segno negativo per tutti gli altri valori, quindi.

$$x_{1,2} = \frac{-k}{-2k^2} = \frac{1}{2k} \overset{\text{per } k = \frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1;$$

$x = 1$ è un punto di flesso a tangente orizzontale discendente per f_k.

Se $\frac{\Delta}{4} < 0$, per $k < \frac{1}{2}$, la funzione f_k non ha punti stazionari.

Il valore richiesto perché f_k abbia un solo punto stazionario è $k = \frac{1}{2}$.

6 Rappresentiamo la curva $xy = 3$ e la retta $y = 3x - 8$.
La curva $xy = 3$ è un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti: $f(x) = \frac{3}{x}$ con dominio $x \neq 0$ e derivata prima $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$.
La generica retta normale all'iperbole ha coefficiente angolare $-\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{x_0^2}{3}$, quindi $\frac{x_0^2}{3} = 3 \rightarrow x_0^2 = 9 \rightarrow x_0 = \pm 3$.

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

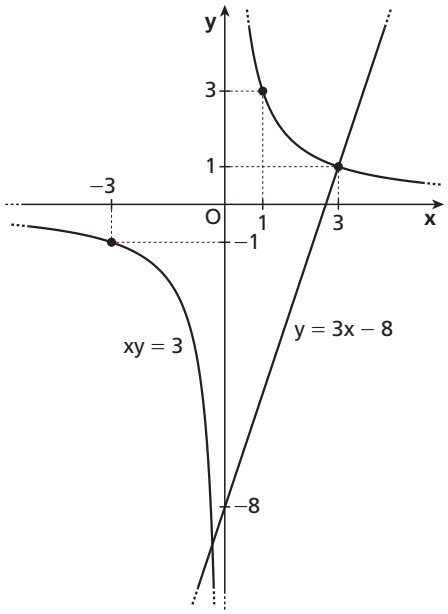


Figura 15

Dal grafico possiamo dedurre che la retta $y = 3x - 8$ interseca la retta solo nel punto $x = 3$, quindi il valore $x = -3$ non è accettabile.

Si poteva anche dimostrare che per $x_0 = -3$, il punto della curva $(-3; -1)$ non appartiene alla retta normale:

$$-1 = 3(-3) - 8 \rightarrow -1 = -17 \text{ falso;}$$

mentre per $x_0 = 3$ otteniamo (3; 1), che appartiene alla retta normale

$$1 = 3 \cdot 3 - 8 \rightarrow 1 = 1 \text{ vero.}$$

Il punto in cui la retta è normale all'iperbole è dunque (3; 1).

7 La funzione $f(x) = \begin{cases} 2c^{x^2-x} + a & \text{per } x \leq 1 \\ bx^2 + x + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$.

La funzione esponenziale e la funzione polinomiale, definite nei due intervalli, sono continue su $\mathbb{R}$, mentre nell'intorno di $x = 1$ abbiamo:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} (2e^{x^2-x} + a) = a + 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^+} (bx^2 + x + 2) = b + 3.$$

Quindi affinché f sia continua su $x = 1$ dobbiamo porre la condizione $a + 2 = b + 3$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(2x-1)e^{x^2-x} & \text{per } x < 1 \\ 2bx + 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

e osserviamo che:

$$\lim_{x \to 1^-} 2(2x-1)e^{x^2-x} = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^+} (2bx + 1) = 2b + 1.$$

Quindi affinché f sia derivabile deve valere $2b + 1 = 2$.
Risolvendo il sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} a + 2 = b + 3 \\ 2b + 1 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

In conclusione, per $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$, la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

8 Determiniamo il punto di flesso della funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$.

Poniamo le condizioni di esistenza: $x^2 + x \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1$; la funzione f ha dunque dominio $D = \mathbb{R} - \{0, -1\}$ e ha derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x) - (2x+1) \cdot (2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{2x^2 + 2x - (2x+1)^2}{(x^2+x)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 4x^2 - 4x - 1}{(x^2+x)^2} =$$

$$\frac{-2x^2 - 2x - 1}{(x^2+x)^2},$$

definita anche essa in D.
Poiché $(x^2 + x)^2 > 0$, $\forall x \in D$, allora

$$f'(x) \geq 0 \leftrightarrow -2x^2 - 2x - 1 \geq 0 \rightarrow 2x^2 + 2x + 1 \leq 0.$$

© Zanichelli Editore S.p.A 2025

Osserviamo che $\frac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 < 0$, quindi la derivata prima è sempre negativa.

La funzione f non ha punti stazionari, quindi non presenta punti di flesso a tangente orizzontale.
Studiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(-4x-2)(x^2+x)^{\cancel{2}} - (-2x^2-2x-1)\cdot 2\cancel{(x^2+x)}\cdot(2x+1)}{(x^2+x)^{\cancel{4}3}}.$$

Dividiamo per $x^2 + x \neq 0$, $\forall x \in D$ e otteniamo:

$$f''(x) = \frac{-2(2x+1)(x^2+x) - 2(2x+1)(-2x^2-2x-1)}{(x^2+x)^3} = \frac{-2(2x+1)[x^2+x-2x^2-2x-1]}{(x^2+x)^3} =$$

$$\frac{2(2x+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x)^3}$$

Poiché $x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x \in D$, $f''(x)$ ha lo stesso segno di $\frac{2x+1}{(x^2+x)^3}$.

Studiamo, ora, il suo segno.

N > 0: $\quad 2x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

D > 0: $\quad (x^2+x)^3 > 0 \rightarrow x^2 + x > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 0$

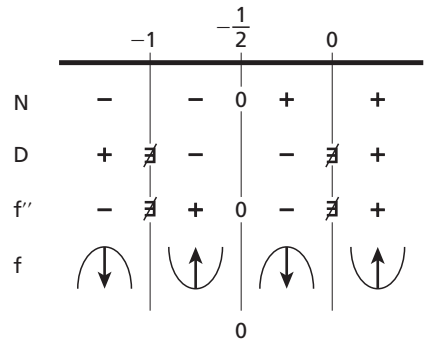


Figura 16

La funzione cambia concavità in $x = -\frac{1}{2}$, allora il punto $F\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ è l'unico flesso a tangente obliqua della funzione f.

Per dimostrare che la funzione è simmetrica rispetto ad F, mostriamo che, se applichiamo una simmetria centrale di centro F ad f, otteniamo la funzione di partenza.

simmetria centrale di centro F: $\quad S: \begin{cases} x' = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - x \\ y' = 2 \cdot 0 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -1 - x \\ y' = -y \end{cases}$

trasformazione inversa: $\quad S^{-1}: \begin{cases} x = -1 - x' \\ y = -y' \end{cases}$

Applichiamo la trasformazione inversa a f:

$$-y' = \frac{2(-1-x')+1}{(-1-x')^2+(-1-x')} \rightarrow \quad \text{togliamo gli apici}$$

$$-y = \frac{-2-2x+1}{1+x^2+2x-1-x} \rightarrow -y = \frac{-2x-1}{x^2+x} \rightarrow y = \frac{2x+1}{x^2+x}.$$

Quindi, la curva di equazione $y = f(x)$ è simmetrica rispetto al suo flesso F.

© Zanichelli Editore S.p.A 2025